

曲率流的参数化有限元逼近^{*1)}

李步扬²⁾

(香港理工大学应用数学系)

摘要

许多物理现象可以在数学上描述为受曲率驱动的自由界面运动, 例如薄膜和泡沫的演变、晶体生长, 等等. 这些薄膜和界面的运动常依赖于其表面曲率, 从而可以用相应的曲率流来描述, 其相关自由界面问题的数值计算和误差分析一直是计算数学领域中的难点. 参数化有限元法是曲率流的一类有效计算方法, 已经能够成功模拟一些曲面在几类基本的曲率流下的演化过程. 本文重点讨论曲率流的参数化有限元逼近, 它的产生、发展和当前的一些挑战.

关键词: 自由界面; 曲率流; 非线性; 参数化有限元; 演化有限元; 保几何结构; 切向速度; 网格均匀化; 收敛性; 误差估计.

MR (2010) 主题分类: 35K65, 53C44, 65D99, 65M60, 65M12.

1. 参数化有限元法和演化有限元法

自从 1956 年 Mullins 提出使用平均曲率流和表面扩散流^[37,38] 研究材料中的晶界演化问题, 曲率流逐渐引起物理学家和数学家的广泛研究和关注. 人们发现许多物理现象皆可以描述为受曲率驱动的自由界面运动, 例如晶体生长^[1,41]、薄膜和泡沫的演变^[28]、带表面活性剂的两相流体^[43] 等. 这些薄膜或界面的运动过程常用依赖于其表面曲率的能量泛函的 L^2 或 H^{-1} 梯度流来描述, 被称为曲率流, 其相关自由界面问题的数值计算和误差分析一直是计算数学中的难点.

曲率流的参数化有限元逼近 (parametric finite element approximation) 始于 G. Dziuk 在 1991 年发表的开创性工作^[17], 在这篇文章中 G. Dziuk 首次提出使用参数化有限元方法 (parametric finite element methods) 逼近三维空间中二维闭曲面的平均曲率流 (mean curvature flow). 本节重点介绍平均曲率流、Willmore 流和表面扩散流的参数化有限元法, 以及相应的演化有限元法 (evolving surface finite element methods) 的矩阵向量形式 (matrix-vector formulation).

* 2021 年 9 月 24 日收到.

¹⁾ 基金项目: 香港研资局优配研究金 PolyU15300920 (Research Grants Council of Hong Kong SAR, GRF Project No. PolyU15300920) 资助.

²⁾ 作者简介: 李步扬, 香港理工大学应用数学系副教授, 现为计算数学杂志 SIAM Journal on Numerical Analysis 和 Mathematics of Computation 的编委. 作者 2005 年本科毕业于山东大学, 2012 年在香港城市大学数学系获博士学位, 博士毕业后入职南京大学, 2015 年作为洪堡学者赴 University of Tübingen 从事研究一年, 后于 2016 年加入香港理工大学工作至今. 主要研究领域为偏微分方程的数值计算方法, 包括曲率流的数值逼近和误差分析、非线性色散方程不光滑解的计算方法、不可压 Navier-Stokes 方程的数值分析、非线性抛物方程的 L^p 范数误差估计、分数阶偏微分方程的高精度求解、热敏电阻方程的适定性和数值分析, 等等.

1.1. 平均曲率流的参数化有限元法

平均曲率流描述的是曲面沿其法向运动且速度大小等于其平均曲率的一种曲面演化过程, 即

$$v = -Hn, \quad (1.1)$$

其中 v 表示曲面的运动速度, H 表示曲面的平均曲率, n 表示曲面的单位外法向量. 数学家对平均曲率流的研究可以追溯到 K. A. Brakke 和 G. Huisken 在 1978 年和 1984 年的开创性工作 [12, 29]. 几何学家 B. White 曾在他 2002 年的综述论文 [42] 中写道: “有许多几何演化过程可以使曲面运动和演变, 但平均曲率流是其中最自然的演化过程.” 利用表面上的恒等式 $Hn = -\Delta_\Gamma \text{id}$, 其中 Δ_Γ 表示曲面 Γ 上的 Laplace–Beltrami 算子, $\text{id}(x) \equiv x$ 表示空间 \mathbb{R}^3 上的恒等函数, 曲面在平均曲率流下的演化过程可以由以下几何演化方程描述:

$$\begin{cases} \partial_t X = (\Delta_{\Gamma[X]} \text{id}) \circ X & y \in \Gamma_0, t \in [0, T], \\ X(y, 0) = y & y \in \Gamma_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 $X(y, t)$ 代表初始曲面 Γ_0 上点 y 在 t 时刻运动到的位置, $\Gamma[X] = \Gamma[X(\cdot, t)]$ 表示由 t 时刻的位置函数 $X(\cdot, t)$ 所确定的曲面, $(\Delta_{\Gamma[X]} \text{id}) \circ X$ 表示曲面 $\Gamma[X]$ 上的函数 $\Delta_{\Gamma[X]} \text{id}$ 与映射 $X: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma[X]$ 的复合.

G. Dziuk 在 1991 年的文章 [17] 中提出了可以使用有限元法逼近曲面 $\Gamma(t_m) = \Gamma[X(\cdot, t_m)]$ 在曲面 $\Gamma(t_{m-1}) = \Gamma[X(\cdot, t_{m-1})]$ 上的参数化表示

$$u(\cdot, t_m) = X(\cdot, t_m) \circ X(\cdot, t_{m-1})^{-1} : \Gamma(t_{m-1}) \rightarrow \Gamma(t_m).$$

该方法假设 $\Gamma(t_{m-1})$ 已经由一个分片三角形曲面 Γ_h^{m-1} 近似, 然后求解一个 Γ_h^{m-1} 上的分片线性函数 $u_h^m : \Gamma_h^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 令其作为新曲面 Γ_h^m 的参数化表示, 即 $\Gamma_h^m = u_h^m(\Gamma_h^{m-1})$. 如果用 $S_h(\Gamma_h^{m-1})^3$ 表示分片三角形曲面 Γ_h^{m-1} 上的所有分片线性映射 $\varphi_h : \Gamma_h^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 组成的有限元空间, 则需要求解 $u_h^m \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3$ 使其满足以下弱形式:

$$\int_{\Gamma_h^{m-1}} \frac{u_h^m - \text{id}}{\tau} \cdot \varphi_h + \int_{\Gamma_h^{m-1}} \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} u_h^m : \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \varphi_h = 0 \quad \forall \varphi_h \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3. \quad (1.3)$$

这种利用有限元计算未知曲面在已知曲面上参数化表示的方法被称为参数化有限元法. 该方法自 1991 年被提出后在几何曲率流的数值计算领域产生了重要影响和发展, 已经逐渐被人们用于计算许多其他的几何曲率流, 包括 Willmore 流、Helfrich 流、表面扩散流 (surface diffusion flow) 等, 以及这些曲率流的相关应用问题; 参见 [44].

1.2. Willmore 流和表面扩散流

Willmore 流是另一类最基本的曲率流, 它是曲面的弹性弯曲能量 $E[\Gamma] = \int_\Gamma \frac{1}{2} H^2$ (又称为 Willmore 能量) 关于曲面 Γ 变分的 L^2 梯度流, 在囊泡形变 [9]、生物膜 [26] 和双层类脂 [27] 等许多问题中有重要应用. 通过对弹性弯曲能量变分可以推出 Willmore 流下曲面的运动速度为

$$v = [\Delta_\Gamma H + H(\frac{1}{2} H^2 - 2K)]n, \quad (1.4)$$

其中 K 表示曲面上的 Gaussian 曲率. 如果用 κ_1 和 κ_2 表示曲面上的两个主方向的曲率, 则平均曲率和 Gaussian 曲率可以分别表示为 $H = \kappa_1 + \kappa_2$ 和 $K = \kappa_1\kappa_2$. Helfrich 流与 Willmore 流类似, 是 Helfrich 能量 $E[\Gamma] = \int_{\Gamma} \frac{1}{2}(H - \bar{H})^2$ (其中 \bar{H} 为某个常数) 在约束条件

$$\int_{\Gamma} v \cdot n H = 0 \text{ (面积守恒)} \quad \text{和} \quad \int_{\Gamma} v \cdot n = 0 \text{ (环绕体积守恒)} \quad (1.5)$$

下关于曲面 Γ 变分的 L^2 梯度流, 其运动速度为

$$v = [\Delta_{\Gamma} H + (H - \bar{H})(\frac{1}{2}H^2 - 2K) + \lambda_A H + \lambda_V]n, \quad (1.6)$$

其中 $\lambda_A(t)$ 和 $\lambda_V(t)$ 是为满足面积守恒和环绕体积守恒所引入的 Lagrange 乘子 (在空间上为常数), 它们可以通过将以上速度表达式代入约束条件 (1.5) 中确定.

表面扩散流最初由 Mullins^[38] 提出模拟界面中的物质扩散产生的晶界演化问题, 后来被证明是描述界面运动的 Cahn-Hilliard 相场方程解的零水平集在界面厚度参数 ε 趋于零时的极限; 参见 [13]. 表面扩散流可以看作曲面的面积泛函 $|\Gamma| = \int_{\Gamma} 1$ 关于曲面 Γ 变分的 H^{-1} 梯度流, 其曲面运动速度为

$$v = (\Delta_{\Gamma} H)n. \quad (1.7)$$

该曲率流在表面积递减的同时可以保持曲面所环绕的体积守恒, 即

$$t_2 \geq t_1 \implies |\Gamma[X(\cdot, t_2)]| \leq |\Gamma[X(\cdot, t_1)]| \quad \text{并且} \quad |\Omega[X(\cdot, t_2)]| = |\Omega[X(\cdot, t_1)]|, \quad (1.8)$$

其中 $\Omega[X(\cdot, t)]$ 表示 t 时刻二维曲面 $\Gamma[X(\cdot, t)]$ 所环绕的三维区域.

由以上速度表达式 (1.4), (1.6) 和 (1.7) 可以看出, Willmore 流、Helfrich 流和表面扩散流皆是四阶曲率流 (因为 $H = -\Delta_{\Gamma} \text{id} \cdot n$ 依赖于曲面位置的二阶偏导数) 且具有相同的最高阶导数项 $\Delta_{\Gamma} H$, 从而在一定程度上可以设计类似的计算方法求解这几类问题.

R. E. Rusu^[40] 和 G. Dziuk^[20] 分别于 2005 年和 2008 年基于 Willmore 流不同形式的等价方程提出了相应的混合参数化有限元法, 其中 R. E. Rusu 的方法是基于 Willmore 流的以下等价方程:

$$\partial_t X \circ X^{-1} - \Delta_{\Gamma[X]}^2 \text{id} + 2\nabla_{\Gamma[X]} \cdot [(\nabla_{\Gamma[X]} \Delta_{\Gamma[X]} \text{id} \cdot n)n] - \frac{1}{2} \nabla_{\Gamma[X]} \cdot (|\Delta_{\Gamma[X]} \text{id}|^2 \nabla_{\Gamma[X]} \text{id}) = 0, \quad (1.9)$$

而 G. Dziuk 采用的方程是

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma[X]} (\partial_t X \circ X^{-1}) \cdot \varphi - \int_{\Gamma[X]} \nabla_{\Gamma[X]} \Delta_{\Gamma[X]} \text{id} : \nabla_{\Gamma[X]} \varphi + \int_{\Gamma[X]} \nabla_{\Gamma[X]} \Delta_{\Gamma[X]} \text{id} : D_{\Gamma[X]}(\varphi) \nabla_{\Gamma[X]} \text{id} \\ & - \int_{\Gamma[X]} \nabla_{\Gamma[X]} \cdot \Delta_{\Gamma[X]} \text{id} \nabla_{\Gamma[X]} \cdot \varphi - \frac{1}{2} \int_{\Gamma[X]} |\Delta_{\Gamma[X]} \text{id}|^2 \nabla_{\Gamma[X]} \cdot \varphi = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

这两组方程具有不同的变分形式, 其有限元解并不等价. R. E. Rusu 和 G. Dziuk 皆采用了混合有限元, 通过引入一个新的未知函数 $w = \Delta_{\Gamma[X]} \text{id}$ 将以上方程转化为 X 和 w 的方程组. 举例说明, G. Dziuk 的方法是假设 $\Gamma[X(\cdot, t_{m-1})]$ 已经由一个分片三角形曲面 Γ_h^{m-1} 近似, 然后

求解未知曲面 Γ_h^m 在已知曲面 Γ_h^{m-1} 上的分片线性参数化表示 $u_h^m : \Gamma_h^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^3$, 令其满足以下弱形式:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_h^{m-1}} \frac{u_h^m - \text{id}}{\tau} \cdot \varphi_h - \int_{\Gamma_h^{m-1}} \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} w_h^m : \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \varphi_h \\ & + \int_{\Gamma_h^{m-1}} \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} w_h^m : \left[(\nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \varphi_h + (\nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \varphi_h)^\top) \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \text{id} \right] \\ & - \int_{\Gamma_h^{m-1}} \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \cdot w_h^m \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \cdot \varphi_h - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h^{m-1}} |\hat{w}_h^{m-1}|^2 \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} u_h^m : \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \varphi_h = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

其中 $w_h^m \in S_h(\Gamma_h^{m-1})$ 是未知函数 u_h^m 的离散 Laplace–Beltrami 导数, 由以下弱形式确定:

$$\int_{\Gamma_h^{m-1}} w_h^m \cdot \psi_h + \int_{\Gamma_h^{m-1}} \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} u_h^m : \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \psi_h = 0. \quad (1.12)$$

在计算中, 可以先求解以下方程得到 $\hat{w}_h^{m-1} \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3$:

$$\int_{\Gamma_h^{m-1}} \hat{w}_h^{m-1} \cdot \psi_h + \int_{\Gamma_h^{m-1}} \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \text{id} : \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \psi_h = 0 \quad \forall \psi_h \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3,$$

再联立求解方程组 (1.11)–(1.12) 得到 $(u_h^m, w_h^m) \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3 \times S_h(\Gamma_h^{m-1})^3$. 在时间步长充分小的条件下, G. Dziuk 的方法对多种不同初始曲面的 Willmore 流都取得了很好的计算效果; 参见 [20] 中的数值算例.

E. Bänsch、P. Morin 和 R. H. Nochetto 在 2005 年的论文 [2] 中对曲面的表面扩散流提出了一种参数化有限元法, 把表面扩散流方程 (1.7) 等价地改写为混合形式

$$\kappa = \Delta_{\Gamma[X]} \text{id}, \quad H = \kappa \cdot n, \quad V = -\Delta_{\Gamma[X]} H, \quad v = Vn, \quad (1.13)$$

然后使用相应的参数化有限元方法求解 $(\kappa_h^m, v_h^m) \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3$ 和 $(H_h^m, V_h^m) \in S_h(\Gamma_h^{m-1})$ 满足以下弱形式:

$$\begin{aligned} & (\kappa_h^m, \varphi_h)_{\Gamma_h^{m-1}} + \tau (\nabla_{\Gamma_h^{m-1}} v_h^m, \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \varphi_h)_{\Gamma_h^{m-1}} = -(\nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \text{id}, \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \varphi_h)_{\Gamma_h^{m-1}}, \\ & (H_h^m, \psi_h)_{\Gamma_h^{m-1}} - (\kappa_h^m, \psi_h n_h^{m-1})_{\Gamma_h^{m-1}} = 0, \\ & (V_h^m, \chi_h)_{\Gamma_h^{m-1}} - (\nabla_{\Gamma_h^{m-1}} H_h^m, \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \chi_h)_{\Gamma_h^{m-1}} = 0, \\ & (v_h^m, \phi_h)_{\Gamma_h^{m-1}} - (V_h^m, \phi_h \cdot n_h^{m-1})_{\Gamma_h^{m-1}} = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

其中 $\varphi_h, \phi_h \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3$ 和 $\psi_h, \chi_h \in S_h(\Gamma_h^{m-1})$ 是有限元空间中的测试函数, τ 是时间步长. 新的曲面 Γ_h^m 由其参数化表示 $u_h^m = \text{id} + \tau v_h^m : \Gamma_h^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 给出. E. Bänsch, P. Morin 和 R. H. Nochetto 的方法可以严格保持表面扩散流面积随时间递减, 从而在曲面不光滑时也具有最基本的稳定性. 数值结果显示该方法对某些曲面会产生网格扭曲, 导致计算崩溃, 但是该方法通过搭配网格点重新分布的技巧仍然可以得到较好的计算结果; 如图 1 所示.

1.3. 演化有限元法及其矩阵向量形式

G. Dziuk 在 1991 年文章 [17] 中提出的参数化有限元法是在全离散的情况下求解已知曲面 Γ_h^{m-1} 上的有限元函数 $u_h^m : \Gamma_h^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 作为未知曲面 Γ_h^m 的参数化表示. 在半离散情况

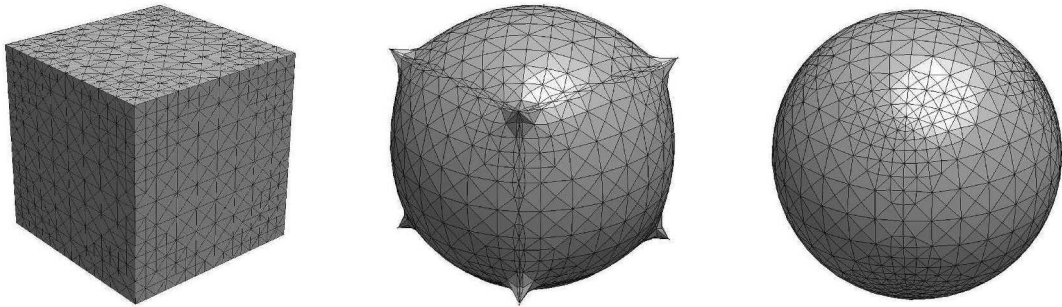


图 1 立方体在表面扩散流下的演化. 前两张图分别为 $t = 0$ 和 $t = 0.002$ 时刻由 (1.14) 得到的计算结果; 第三张图为使用 [2] 中的网格正则化方法改善网格性质后得到的 $t = 0.002$ 的计算结果

下, 这种参数化有限元法可以改写为在随时间演化的有限元空间 $S_h(\Gamma[X_h(t)])$ 中求解随时间演化的未知曲面 $\Gamma[X_h(t)]$ 上的偏微分方程. G. Dziuk 和 C. Elliott 在 2007 年的文章 [21] 中将这种计算方法称为演化曲面有限元法, 并分析了半离散和全离散演化曲面有限元法求解“已知”运动曲面上偏微分方程的收敛性; 参见 [22–24].

B. Kovács、B. Li、C. Lubich 和 C. A. Power Guerra 在 2017 年的文章 [34] 中提出了使用矩阵向量形式分析演化曲面有限元法逼近“未知”曲面的的误差. 举例说明, 平均曲率流的演化有限元法具有以下矩阵向量形式:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (1.15)$$

其中 $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 是由节点向量 \mathbf{x} 所确定的有限元曲面 $\Gamma_h[\mathbf{x}]$ 上的有限元质量矩阵和刚度矩阵. 平均曲率流的插值曲面也满足类似的方程

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}^*)\dot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{A}(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* = \mathbf{M}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d}, \quad (1.16)$$

其中 \mathbf{d} 是插值产生的误差. 由方程 (1.15) 和 (1.16) 可以得到误差函数 $\mathbf{e} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$ 所满足的矩阵向量方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{x}^*)\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{A}(\mathbf{x}^*)\mathbf{e} &= (\mathbf{M}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{M}(\mathbf{x}))\dot{\mathbf{e}} - (\mathbf{M}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{M}(\mathbf{x}))\dot{\mathbf{x}}^* \\ &\quad + (\mathbf{A}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{A}(\mathbf{x}))\dot{\mathbf{e}} - (\mathbf{A}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{A}(\mathbf{x}))\dot{\mathbf{x}}^* \\ &\quad + \mathbf{M}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

以上方程乘以测试向量 \mathbf{w} 可以转化为相应曲面上的积分进行估计. 例如,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{x}^*)\dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \mathbf{M}(\mathbf{x}^*)\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{M}(\mathbf{x}^*) \right) \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \\ &= \int_{\Gamma_h[\mathbf{x}^*]} \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{e}}|^2 - \int_{\Gamma_h[\mathbf{x}^*]} (\nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}^*]} \cdot \mathbf{v}_h^*) \frac{1}{2} |\mathbf{e}|^2, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^*)\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \int_{\Gamma_h[\mathbf{x}^*]} |\nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}^*]} \mathbf{e}|^2, \quad (1.19)$$

其中 e 是以 \mathbf{e} 为节点向量的曲面 $\Gamma_h[\mathbf{x}^*]$ 上的有限元函数. 在方程 (1.18) 右端可以被左端控制的情况下, 即可得到相应的 $L^\infty(0, T; L^2)$ 和 $L^2(0, T; H^1)$ 误差估计.¹⁾

由矩阵向量形式还可以简单地构造出高阶时间离散方法, 例如 k 步倒向导数方法 (k -step BDF):

$$\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{x}}^m) \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^k \delta_j \mathbf{x}^{m-j} + \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}^m) \mathbf{x}^m = \mathbf{0}, \quad (1.20)$$

其中 $\tilde{\mathbf{x}}^m = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \mathbf{x}^{m-1-j}$ 是 $\mathbf{x}(t_m)$ 和 $\mathbf{u}(t_m)$ 的 k 步倒向外插逼近, δ_j 和 γ_j 是 k 步 BDF 方法和倒向外插法中的系数. 以上方法在时间上有 k 阶收敛, 等价于在外插曲面 $\Gamma_h[\tilde{\mathbf{x}}]$ 上求解未知曲面 Γ_h^m 的参数化表示.

由此可见, 将参数化有限元法在半离散形式下写为演化有限元法及其矩阵形式, 可以更容易地进一步发展高阶时间离散方法和误差分析, 演化有限元法及其矩阵形式的全离散方法通常等价于某一种参数化有限元法.

2. 人工切向速度

E. Bänsch、P. Morin 和 R. H. Nochetto 求解表面扩散流的方法说明: 在曲率流的计算中, 能量递减性质虽然可以使计算具有稳定性, 但对给定的网格长度和时间步长并不能保证计算的准确性. 对给定的网格长度和时间步长, 曲面的网格可能会随时间发展而被扭曲, 网格点可能会随时间发展而挤在一起相互卡住不动, 从而产生计算错误. 为克服这种计算上的困难, J. W. Barrett、H. Garcke 和 R. Nürnberg 在 2007 年和 2008 年的文章 [6–8] 中引入了人工切向速度以促使网格点在曲面的数值演化过程中趋向于均匀分布, 从而可以避免网格扭曲或网格点挤在一起.

以平均曲率流为例, J. W. Barrett、H. Garcke 和 R. Nürnberg 的方法 (简称为 BGN 方法) 是寻找满足以下有限元弱形式的 $(u_h^m, H_h^m) \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3 \times S_h(\Gamma_h^{m-1})$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_h^m - \text{id}}{\tau}, \chi_h n_h^{m-1} \right\rangle_{\Gamma_h^{m-1}}^h &= - \langle H_h^m, \chi_h \rangle_{\Gamma_h^{m-1}}^h \quad \forall \chi_h \in S_h(\Gamma_h^{m-1}), \\ \langle H_h^m n_h^{m-1}, \eta_h \rangle_{\Gamma_h^{m-1}}^h &= \int_{\Gamma_h^{m-1}} \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} u_h^m \cdot \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \eta_h \quad \forall \eta_h \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $u_h^m : \Gamma_h^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是未知曲面 Γ_h^m 的参数化表示, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_h^{m-1}}^h$ 是曲面 Γ_h^{m-1} 上的某种离散内积. 该方法只对速度的法向分量有限制, 对速度的切向分量没有限制, 会自动产生适当的切向速度, 这些切向速度并不会改变曲面形状 (曲面的形状由其法向速度决定). BGN 方法实际上是希望 u_h^m 是 Γ_h^{m-1} 到 Γ_h^m 的共形参数化, 即在切向自由度中去极小化 Dirichlet 积分 $\int_{\Gamma_h^{m-1}} |\nabla_{\Gamma_h^{m-1}} u_h^m|^2$. 特别地, 如果 $\text{id} : \Gamma_h^{m-1} \rightarrow \Gamma_h^{m-1}$ 是共形参数化, 我们称 Γ_h^{m-1} 为共形的. 对一维的共形的多边形曲线, 可以证明 Γ_h^{m-1} 的相邻的单元要么是平行的, 要么长度相等; 参见 [11, 定理 62]. 高维的讨论更为复杂, 但同样可以证明共形的多面体曲面具有很好的网格性

¹⁾ 对 [34] 中所考虑受 PDE 驱动的曲面, 右端确实可以被左端控制住从而得到相应的误差估计, 但是对二维闭曲面的平均曲率流, 方程 (1.18) 的右端并不能被左端控制住, 从而无法以这种方式得到相应的误差估计; 具体参见第 4 节.

质; 参见 [8, 评论 4.1]. 因此 BGN 方法是希望最终的网格能够趋于共形. 尽管目前仍然难以证明全离散格式的严格的网格演化性质, 但从大量的数值实验中, 我们可以观察到 BGN 方法产生了切向速度并且促使网格点在曲面上更均匀的分布. 这类通过引入人工切向速度使曲面上网格分布更加均匀的方法也适用于其他曲率流, 包括 Willmore 流、Helfrich 流、表面扩散流、Gauss 曲率流, 等等; 具体参见 [7, 8].

继续以平均曲率流为例, 考虑以下两组参数方程所对应的两个初始曲面 $\Gamma_0 = X_0([0, 2\pi] \times [0, \pi])$ 和 $\Gamma'_0 = X'_0([0, 2\pi] \times [0, \pi])$:

$$X_0(\theta, \varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ (0.7 \cos^2 \varphi + 0.3) \cos \theta \sin \varphi \\ (0.7 \cos^2 \varphi + 0.3) \sin \theta \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi], \quad (2.2)$$

$$X'_0(\theta, \varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ (0.6 \cos^2 \varphi + 0.4) \cos \theta \sin \varphi \\ (0.6 \cos^2 \varphi + 0.4) \sin \theta \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi]. \quad (2.3)$$

根据 C. Elliott 和 H. Fritzh 的文章^[25], 曲面 Γ_0 和 Γ'_0 在平均曲率流下将分别演化到哑铃形和球形两种状态, 其中哑铃形曲面会进一步分裂为两个球面. 使用 J. W. Barrett、H. Garcke 和 R. Nürnberg 的方法 (以下简称为 BGN 方法) 模拟这两个曲面的平均曲率流, 可以分别得到哑铃形和球形两种状态; 如图 2, 3 所示. 然而, 在相同的网格长度和时间步长下使用 G. Dziuk 的方法模拟这两个曲面的平均曲率流, 对 Γ_0 可以得到哑铃形的结果, 对 Γ'_0 无法得到理想中的球形计算结果; 如图 4, 5 所示. 图 5 中的计算结果显示, G. Dziuk 的方法的计算过程中会有大量节点向椭球的左右两极聚集, 使得网格扭曲、计算崩溃.

除平均曲率流外, BGN 方法^[6, 8] 对其他曲率流的计算也有很大改进, 例如图 6 中所示, BGN 方法不需要借助网格点重新分布便可得到立方体在表面扩散流下的完整演化过程 (可与图 1 对比). 此外, W. Bao、W. Jiang、Y. Wang、Q. Zhao 等人将 BGN 方法应用并推广到具有各向异性表面能量的固态去湿问题中, 对接触线迁移且各向异性的开曲线和开曲面的表面扩散流问题提出了相应的计算方法, 取得了很好的计算结果^[3, 46, 47].

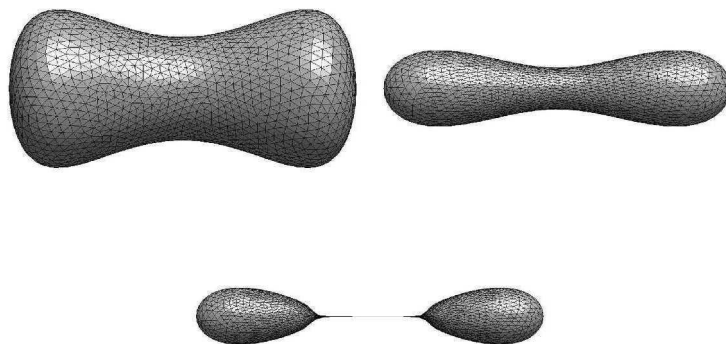


图 2 Γ_0 在平均曲率流下的演化, 三张图分别对应时刻 $t = 0, t = 0.0556, t = 0.06$. (BGN 方法的计算结果)

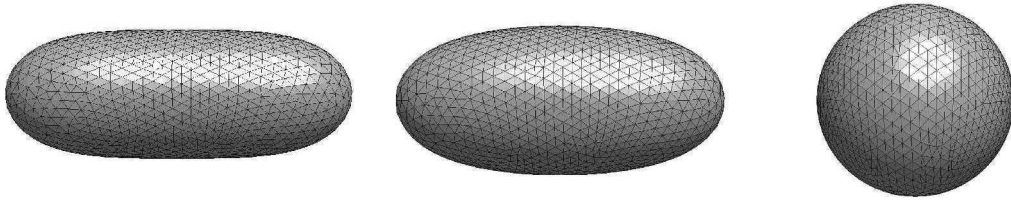


图 3 Γ_0 在平均曲率流下的演化, 三张图分别对应时刻 $t = 0.075, 0.08875, t = 0.090841$. (BGN 方法的计算结果)

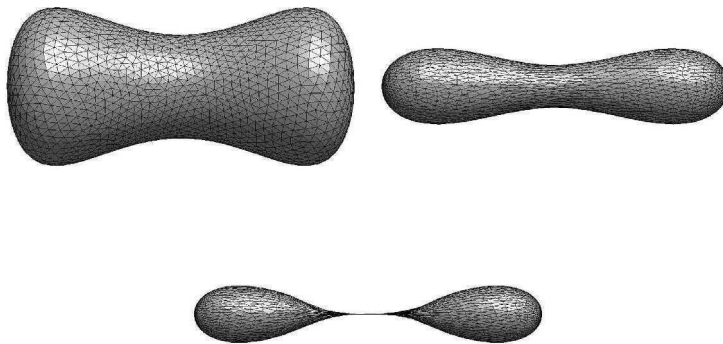


图 4 Γ_0 在平均曲率流下的演化. 三张图分别对应时刻 $t = 0, t = 0.0556, t = 0.06$. (G. Dziuk 方法的计算结果)

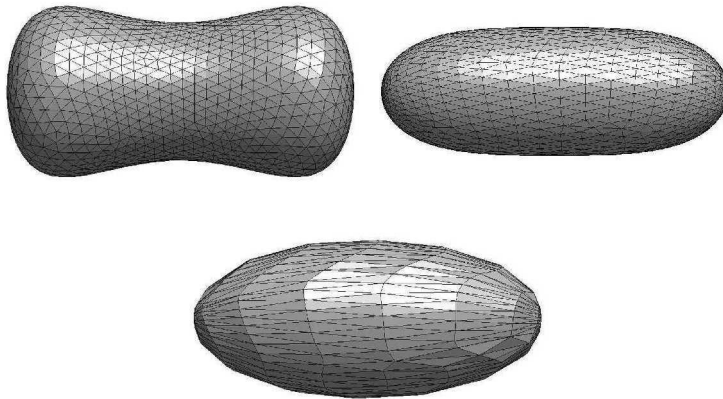


图 5 Γ_0 在平均曲率流下的演化. 三张图分别对应时刻 $t = 0, t = 0.075, t = 0.088759$. (G. Dziuk 方法的计算结果)

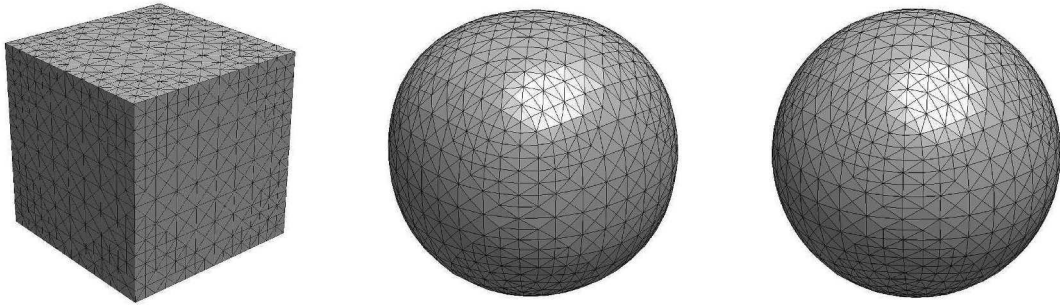


图 6 立方体表面在表面扩散流下的演化. 三张图分别对应 $t = 0, t = 0.0008, t = 0.002$. (BGN 方法的计算结果)

3. 保几何结构性质

除引入切向速度使网格分布趋向于均匀外, 构造能够保持能量稳定性和其他几何性质的计算方法可以进一步改进曲率流的计算效果. 在这方面, 人们对平均曲率流、表面扩散流、Willmore 流等曲率流的计算皆取得了一些进展.

平均曲率流可以看作表面积 $|\Gamma| = \int_{\Gamma} 1$ 关于曲面 Γ 变分的 L^2 梯度流, 所以平均曲率流下的曲面具有面积随时间递减的性质:

$$t_2 \geq t_1 \implies |\Gamma[X(\cdot, t_2)]| \leq |\Gamma[X(\cdot, t_1)]|. \quad (3.1)$$

通过在 G. Dziuk 的方法 (1.3) 中选取测试函数 $\varphi_h = u_h^m - \text{id}$ 并利用不等式 (参见 [11, Lemma 3.17])

$$\left\langle \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} u_h^m, \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} (u_h^m - \text{id}) \right\rangle_{\Gamma_h^{m-1}} \geq |\Gamma_h^m| - |\Gamma_h^{m-1}|, \quad (3.2)$$

可以证明 G. Dziuk 的参数化有限元方法在逼近平均曲率流的同时也能够保持以上所述的面积递减性质, 即

$$|\Gamma_h^m| \leq |\Gamma_h^{m-1}|. \quad (3.3)$$

这种无条件面积递减性质使 G. Dziuk 的方法在曲面产生奇点时仍然可以具有基本的稳定性.

BGN 方法可以在保持面积递减性质 (3.3) 的同时利用切向速度使网格趋于均匀分布, 从而产生更好的计算效果: 在 (2.1) 中取 $\chi_h = H_h^m$ 和 $\eta_h = (u_h^m - \text{id})/\tau$ 可以得到

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_h^m - \text{id}}{\tau}, H_h^m n_h^{m-1} \right\rangle_{\Gamma_h^{m-1}}^h &= - \langle H_h^m, H_h^m \rangle_{\Gamma_h^{m-1}}^h \\ \left\langle H_h^m n_h^{m-1}, \frac{u_h^m - \text{id}}{\tau} \right\rangle_{\Gamma_h^{m-1}}^h &= \int_{\Gamma_h^{m-1}} \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} u_h^m \cdot \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \frac{u_h^m - \text{id}}{\tau}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

再将以上两个方程相减并利用不等式 (3.2), 可以推出

$$|\Gamma_h^m| - |\Gamma_h^{m-1}| \leq -\tau \langle H_h^m, H_h^m \rangle_{\Gamma_h^{m-1}}^h \leq 0. \quad (3.5)$$

在 (1.8) 中我们已经知道表面扩散流在曲面面积递减的同时可以保持曲面所环绕的体积守恒. E. Bänsch, P. Morin 和 R. H. Nochetto 在 [2] 中的方法和 BGN 方法皆可在半离散 (时间连续) 情况下同时保持曲面的面积递减和曲面所环绕的体积守恒, 但是在全离散数值计算中只能严格保持曲面的面积递减, 无法严格保持曲面所环绕的体积守恒. 举例说明, BGN 方法求解表面扩散流方程 (1.7) 的有限元弱形式为

$$\langle v_h, \chi_h n_h \rangle_{\Gamma[X_h]}^h + \langle \nabla_{\Gamma[X_h]} H_h, \nabla_{\Gamma[X_h]} \chi_h \rangle_{\Gamma[X_h]} = 0, \quad (3.6a)$$

$$\langle H_h n_h, \eta_h \rangle_{\Gamma[X_h]}^h - \langle \nabla_{\Gamma[X_h]} X_h, \nabla_{\Gamma[X_h]} \eta_h \rangle_{\Gamma[X_h]} = 0, \quad (3.6b)$$

其中 $\chi_h \in S_h(\Gamma_h^{m-1})$ 和 $\eta_h \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3$ 是有限元空间中的测试函数, 曲面的位置可以通过 $\partial_t X_h = v_h \circ X_h$ 确定. 在 (3.6a) 中取 $\chi_h = 1$ 可以得到以下体积守恒公式:

$$0 = \int_{\Gamma[X_h]} v_h \cdot n_h = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_h} 1, \quad (3.7)$$

其中 Ω_h 是曲面 $\Gamma[X_h]$ 环绕的三维区域. 此外, 在 (3.6) 中取 $\chi_h = H_h$ 和 $\eta_h = v_h$ 并把两个方程的结果相减, 可以推出

$$\begin{aligned} 0 &= \|\nabla_{\Gamma[X_h]} H_h\|_{L^2(\Gamma[X_h])}^2 + \langle \nabla_{\Gamma[X_h]} X_h, \nabla_{\Gamma[X_h]} v_h \rangle_{\Gamma[X_h]} \\ &= \|\nabla_{\Gamma[X_h]} H_h\|_{L^2(\Gamma[X_h])}^2 + \frac{d}{dt} |\Gamma[X_h]|, \end{aligned} \quad (3.8)$$

从而得到以下面积递减性质:

$$\frac{d}{dt} |\Gamma[X_h]| = -\|\nabla_{\Gamma[X_h]} H_h\|_{L^2(\Gamma[X_h])}^2 \leq 0. \quad (3.9)$$

在全离散情况下 BGN 方法的有限元弱形式为

$$\left\langle \frac{u_h^m - \text{id}}{\tau}, \chi_h n_h^{m-1} \right\rangle_{\Gamma_h^{m-1}}^h + \left\langle \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} H_h^m, \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \chi_h \right\rangle_{\Gamma_h^{m-1}} = 0, \quad (3.10a)$$

$$\left\langle H_h^m n_h^{m-1}, \eta_h \right\rangle_{\Gamma_h^{m-1}}^h - \left\langle \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} u_h^m, \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \eta_h \right\rangle_{\Gamma_h^{m-1}} = 0, \quad (3.10b)$$

其中 $u_h^m = X_h^m \circ (X_h^{m-1})^{-1}$ 是未知曲面 Γ_h^m 在已知曲面 Γ_h^{m-1} 上的参数化表示. 在 (3.10) 中取 $\chi_h = H_h^m$ 和 $\eta_h = (u_h^m - \text{id})/\tau$ 并把两个方程的结果相减, 可以推出

$$\begin{aligned} 0 &= \|\nabla_{\Gamma_h^{m-1}} H_h^m\|_{L^2(\Gamma_h^{m-1})}^2 + \left\langle \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} u_h^m, \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \frac{u_h^m - \text{id}}{\tau} \right\rangle_{\Gamma_h^{m-1}} \\ &\geq \|\nabla_{\Gamma_h^{m-1}} H_h^m\|_{L^2(\Gamma_h^{m-1})}^2 + \frac{|\Gamma_h^m| - |\Gamma_h^{m-1}|}{\tau}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

从而得到以下面积递减性质:

$$|\Gamma_h^m| \leq |\Gamma_h^{m-1}| - \tau \|\nabla_{\Gamma_h^{m-1}} H_h^m\|_{L^2(\Gamma_h^{m-1})}^2. \quad (3.12)$$

但是在 (3.10a) 代入 $\chi_h = 1$ 只能得到

$$\int_{\Gamma_h^{m-1}} (u_h^m - \text{id}) \cdot n_h^{m-1} = 0, \quad (3.13)$$

由此并不能推出 $\int_{\Omega_h^m} 1 = \int_{\Omega_h^{m-1}} 1$. E. Bänsch, P. Morin 和 R. H. Nochetto 的方法也类似.

以上两种方法都是线性化半隐式有限元法, 在每个时间层人们只要求解一个线性方程组即可得到下一个时间层曲面的参数化表示. 最近, W. Jiang 和 B. Li 在 2021 年的论文 [30] 中构造出一种可以同时保持表面扩散流曲线长度递减和曲线所环绕的面积守恒的全离散非线性隐格式. 该方法将表面扩散流的方程改写为

$$\begin{aligned} (\partial_t X \circ X^{-1}) \cdot n &= \partial_\Gamma^2 H, \\ (\partial_t X \circ X^{-1}) \cdot \tau &= 0, \\ Hn + Q\tau &= -\partial_\Gamma \tau, \quad (\text{其中 } Q = 0 \text{ 是人为引入的辅助变量}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

并考虑以下有限元方法. 假设 u_h^m 是未知曲线 Γ_h^m 在已知分片三角形曲线 Γ_h^{m-1} 上的分片线性的参数化表示, 并定义速度函数

$$v_h^m = \frac{u_h^m - \text{id}}{\tau}.$$

令 $\Gamma_h(t)$ 为 Γ_h^{m-1} 上的以下参数化表示所对应的曲线:

$$u_h(t) = \frac{t_m - t}{\tau} \text{id} + \frac{t - t_{m-1}}{\tau} u_h^m(\xi), \quad t \in [t_{m-1}, t_m].$$

对任意 Γ_h^{m-1} 上的有限元函数 f_h^m , 定义 \hat{f}_h^m 为曲线 $\Gamma_h(t)$ 上与 f_h^m 具有相同节点值的有限元函数. 然后求满足以下方程的有限元函数 $(u_h^m, H_h^m, Q_h^m) \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3 \times S_h(\Gamma_h^{m-1}) \times S_h(\Gamma_h^{m-1})$:

$$\begin{aligned} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} \hat{v}_h^m \cdot n_h(t) \hat{\phi}_h \, dt &= - \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} \partial_{\Gamma_h(t)} \hat{H}_h^m \cdot \partial_{\Gamma_h(t)} \hat{\phi}_h \, dt, \\ \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} \hat{v}_h^m \cdot \tau_h(t) \hat{\varphi}_h \, dt &= 0, \\ \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} (\hat{H}_h^m n_h(t) + \hat{Q}_h^m \tau_h(t)) \cdot \hat{\psi}_h \, dt &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} \partial_{\Gamma_h(t)} \text{id} \cdot \partial_{\Gamma_h(t)} \hat{\psi}_h \, dt, \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中 $n_h(t)$ 和 $\tau_h(t)$ 是曲线 $\Gamma_h(t)$ 上的单位法向量和切向量, $(\psi_h^m, \phi_h^m, \varphi_h^m) \in S_h(\Gamma_h^{m-1})^3 \times S_h(\Gamma_h^{m-1}) \times S_h(\Gamma_h^{m-1})$ 是有限元空间中的测试函数. 如果令 $A(t)$ 表示表面扩散流的曲线在 t 时刻所环绕区域的面积, 则

$$\begin{aligned} A(t_m) - A(t_{m-1}) &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{d}{dt} A(t) dt = - \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} \hat{v}_h^m \cdot n_h(t) \, dt \\ &= - \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} \partial_{\Gamma_h(t)} \hat{H}_h^m \cdot \partial_{\Gamma_h(t)} 1 \, dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

如果令 $L(t)$ 表示表面扩散流的曲线在 t 时刻的长度, 则

$$\begin{aligned}
 L(t_m) - L(t_{m-1}) &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{d}{dt} L(t) dt = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} \nabla_{\Gamma_h(t)} \cdot \hat{v}_h^m dt \\
 &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} \tau_h(t) \cdot \partial_{\Gamma_h(t)} \hat{v}_h^m dt \\
 &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} \partial_{\Gamma_h(t)} \text{id} \cdot \partial_{\Gamma_h(t)} \hat{v}_h^m dt \\
 &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} (\hat{H}_h^m n_h(t) + \hat{Q}_h^m \tau_h(t)) \cdot \hat{v}_h^m dt \\
 &= - \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} |\partial_{\Gamma_h(t)} \hat{H}_h^m|^2 dt \\
 &\leq 0.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

由此可见 (3.15) 中的全离散方法可以同时保持表面扩散流曲线的长度递减和所环绕的面积守恒. 此方法并没有引入切向速度促使网格分布均匀化, 因此在计算中会时常需要当网格扭曲时使网格点重新分配.

W. Bao 和 Q. Zhao 在 2021 年的文章 [4] 中提出了具有切向速度的保结构算法, 他们的方法等价于以下有限元弱形式:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} \hat{v}_h^m \cdot n_h(t) \hat{\phi}_h dt &= - \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h^{m-1}} \partial_{\Gamma_h^{m-1}} H_h^m \partial_{\Gamma_h^{m-1}} \phi_h dt, \\
 \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h(t)} \hat{H}_h^m n_h(t) \cdot \hat{\psi}_h dt &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma_h^{m-1}} \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} u_h^m \cdot \nabla_{\Gamma_h^{m-1}} \psi_h dt.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

该方法只规定的速度的法向分量如何运动, 从而允许出现切向速度. 该方法的保结构性质的证明类似于 (3.16), (3.17): 取测试函数 $\phi_h = 1$ 和 $(\phi_h, \psi_h) = (H_h^m, v_h^m)$ 可以得到二维平面上表面扩散流曲线的长度递减和所环绕的面积守恒

$$A(t_m) - A(t_{m-1}) = 0 \quad \text{和} \quad L(t_m) - L(t_{m-1}) \leq 0. \tag{3.19}$$

对三维空间中的表面扩散流曲面可以得到

$$V(t_m) - V(t_{m-1}) = 0 \quad \text{和} \quad A(t_m) - A(t_{m-1}) \leq 0. \tag{3.20}$$

其中 $V(t)$ 是曲面所环绕区域的体积, $A(t)$ 是曲面的表面积.

对 Willmore 流和 Helfrich 流, 目前已知 G. Dziuk 的参数化有限元法 [20] 和 BGN 方法 [7] 皆可保持半离散有限元解的能量递减, 但是皆无法在全离散有限元格式中严格保持 Willmore 能量递减的性质.

4. 收敛性和误差分析

许多参数化有限元法逼近一维曲线平均曲率流的收敛性已被证明, 例如 G. Dziuk 最初提出的参数化有限元法 [18, 45], K. Deckelnick 和 G. Dziuk 引入切向速度后所得到的改良方法 [15], C. M. Elliott 和 H. Fritz 使用 DeTurck 技巧构造的方法 [25], J. W. Barrett, K. Deckelnick 和

V. Styles 使用 DeTurck 技巧分析的半隐式全离散方法 [5], 以及一维曲线在各向异性平均曲率流下的运动 [19, 39]. 此外, K. Deckelnick 和 G. Dziuk 对 graph 曲面的平均曲率流证明了非参数化有限元的收敛性 [14, 16], J. W. Barrett, K. Deckelnick 和 R. Nurnberg [10] 使用 DeTurck 技巧对轴对称平均曲率流证明了相应数值逼近的收敛性.

二维闭合曲面平均曲率流的误差分析与一维曲线和 graph 曲面截然不同, 主要难度是该方程缺少完整的强制性(抛物性); 参见 [36] 中的论述. 为了克服这方面的困难, B. Kovács, B. Li 和 C. Lubich 在 2019 年的论文 [31] 中利用平均曲率流法向量 n 和平均曲率 H 的时间发展方程提出了一种新的演化有限元法并证明了其收敛性. B. Kovács, B. Li 和 C. Lubich 提出的方法是求解平均曲率流的以下等价形式:

$$\partial_t^\bullet n = \Delta_{\Gamma[X]} n + |\nabla_{\Gamma[X]} n|^2 n, \quad (4.1a)$$

$$\partial_t^\bullet H = \Delta_{\Gamma[X]} H + |\nabla_{\Gamma[X]} n|^2 H, \quad (4.1b)$$

$$v - \Delta_{\Gamma[X]} v = -Hn + \Delta_{\Gamma[X]}(Hn), \quad (4.1c)$$

$$\partial_t X = v \circ X, \quad (4.1d)$$

其中 ∂_t^\bullet 表示物质导数 (material derivative), 即

$$\partial_t^\bullet n = [\partial_t(n \circ X)] \circ X^{-1} \quad \text{和} \quad \partial_t^\bullet H = [\partial_t(H \circ X)] \circ X^{-1}.$$

方程组 (4.1a)–(4.1c) 与 (1.2) 虽然在理论上等价, 但是计算上并不等价 — 引入法向量 n 和曲率 H 的演化方程有助于增强数值方法的稳定性和精确性. 方程组 (4.1a)–(4.1c) 的演化曲面有限元方法为求节点向量 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{3N}$ (其中 N 是表面上的节点个数) 和由此节点向量所确定的有限元表面上的函数 $v_h(\cdot, t) \in S_h[\mathbf{x}(t)]^3$, $n_h(\cdot, t) \in S_h[\mathbf{x}(t)]^3$ 和 $H_h(\cdot, t) \in S_h[\mathbf{x}(t)]$ 满足以下有限元弱形式:

$$\int_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} \partial_h^\bullet n_h \cdot \varphi_h^n + \int_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} \nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} n_h \cdot \nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} \varphi_h^n = \int_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} |\nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} n_h|^2 n_h \cdot \varphi_h^n, \quad (4.2a)$$

$$\int_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} \partial_h^\bullet H_h \varphi_h^H + \int_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} \nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} H_h \cdot \nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} \varphi_h^H = \int_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} |\nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} n_h|^2 H_h \varphi_h^H, \quad (4.2b)$$

$$\int_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} \nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} v_h \cdot \nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} \varphi_h^v + \int_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} v_h \cdot \varphi_h^v = - \int_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} \nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}]}(H_h n_h) \cdot \nabla_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} \varphi_h^v - \int_{\Gamma_h[\mathbf{x}]} H_h n_h \cdot \varphi_h^v, \quad (4.2c)$$

$$\partial_t X_h(p_h, t) = v_h(X_h(p_h, t), t), \quad \forall p_h \in \Gamma_h^0, \quad (4.2d)$$

其中 $\varphi_h^v \in S_h[\mathbf{x}(t)]^3$, $\varphi_h^n \in S_h[\mathbf{x}(t)]^3$ 和 $\varphi_h^H \in S_h[\mathbf{x}(t)]$ 是曲面 $\Gamma_h[\mathbf{x}(t)] = \Gamma[X_h(\cdot, t)]$ 上的有限元测试函数. 节点向量 \mathbf{x} 的初值可以取初始曲面 Γ^0 的 Lagrange 插值曲面的节点, n_h 和 H_h 的初值可以取初值 n^0 和 H^0 的 Lagrange 插值函数.

通过使用文章 [34] 中提出的演化曲面有限元法的矩阵向量记号, B. Kovács, B. Li 和 C. Lubich 把方程组 (4.1a)–(4.1c) 的演化曲面有限元方法写为矩阵向量形式

$$\mathbf{M}^{[4]}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}^{[4]}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (4.3a)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad (4.3b)$$

$$(\mathbf{M}^{[3]}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^{[3]}(\mathbf{x})) \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (4.3c)$$

其中 \mathbf{x} 表示有限元节点坐标组成的向量, \mathbf{v} 和 \mathbf{u} 分别表示有限元函数 v_h 和 $u_h = (n_h, H_h)$ 在节点处的值组成的向量, $\mathbf{M}^{[4]}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{A}^{[4]}(\mathbf{x})$ 是曲面 $\Gamma_h[\mathbf{x}]$ 上的有限元质量矩阵和刚度矩阵, 其上标对应所乘向量的维数 (u_h 是四维向量函数, v_h 是三维向量函数), $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 分别对应 (4.1a), (4.1b) 和 (4.3c) 中的非线性项. 该矩阵向量形式 (4.3) 可以很方便地使用 k 步倒向差分法 (k -step BDF) 进行时间离散:

$$\mathbf{K}(\tilde{\mathbf{x}}^m)\mathbf{v}^m = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}^m, \tilde{\mathbf{u}}^m), \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{M}(\tilde{\mathbf{x}}^m)\frac{1}{\tau}\sum_{j=0}^k\delta_j\mathbf{u}^{m-j} + \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{x}}^m)\mathbf{u}^m = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}^m, \tilde{\mathbf{u}}^m), \quad (4.4b)$$

$$\frac{1}{\tau}\sum_{j=0}^k\delta_j\mathbf{x}^{m-j} = \mathbf{v}^m. \quad (4.4c)$$

在平均曲率流光滑且不退化的情况下, B. Kovács, B. Li 和 C. Lubich 利用矩阵向量形式的误差估计方法证明了 (4.4) 中的数值方法 (以下简称 KLL 方法) 在使用 $r \geq 2$ 次有限元和 $k \geq 2$ 步 BDF 方法时对 $t_m \in [0, T]$ 具有以下误差上界:

$$\begin{aligned} \|(X_h^m)^l - X(\cdot, t_m)\|_{H^1(\Gamma_0)} &\leq C_T(h^r + \tau^k), \\ \|(v_h^m)^L - v(\cdot, t_m)\|_{H^1(\Gamma(t_m))} &\leq C_T(h^r + \tau^k), \\ \|(n_h^m)^L - n(\cdot, t_m)\|_{H^1(\Gamma(t_m))} &\leq C_T(h^r + \tau^k), \\ \|(H_h^m)^L - H(\cdot, t_m)\|_{H^1(\Gamma(t_m))} &\leq C_T(h^r + \tau^k), \end{aligned}$$

其中 $(X_h^m)^l$ 表示初始曲面 Γ_0 的 Lagrange 插值曲面 Γ_h^0 上的函数 X_h^m 在 Γ_0 上所对应的函数 (the lift of X_h^m from Γ_h^0 to Γ_0); 类似地, $(v_h^m)^L$ 表示曲面 Γ_h^m 上的函数 v_h^m 在 $\Gamma(t_m)$ 上所对应的函数 (与 v_h^m 具有相同的节点值). KLL 方法及其误差估计也适用受力驱动的和曲面上扩散方程耦合的平均曲率流; 参见 [33].

最近, B. Kovács, B. Li 和 C. Lubich 在 [33] 中推导出了 Willmore 流的一种新等价形式 (其中 $A = \nabla_{\Gamma[X]}n$, $Q = -\frac{1}{2}H^3 + |A|^2H$):

$$\partial_t X = v \circ X, \quad (4.5a)$$

$$v = Vn, \quad (4.5b)$$

$$\partial_t^\bullet H = -\Delta_{\Gamma[X]}v - |A|^2v, \quad (4.5c)$$

$$V = \Delta_{\Gamma[X]}H + Q; \quad (4.5d)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^\bullet n = &-\Delta_{\Gamma[X]}z + (HA - A^2)z + |\nabla_{\Gamma[X]}H|^2n - 2(\nabla_{\Gamma[X]} \cdot (A\nabla_{\Gamma[X]}H))n \\ &- |A|^2\nabla_{\Gamma[X]}H - \nabla_{\Gamma[X]}Q, \end{aligned} \quad (4.5e)$$

$$z = \Delta_{\Gamma[X]}n + |A|^2n, \quad (4.5f)$$

并在 Willmore 流光滑且不退化的情况下证明了以上方程组的演化曲面有限元法对 $t \in [0, T]$ 具有以下最优收敛阶:

$$\begin{aligned} \|X_h^l(\cdot, t) - X(\cdot, t)\|_{H^1(\Gamma^0)} &\leq C_T h^k, & \|v_h^L(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{H^1(\Gamma(t))} &\leq C_T h^k, \\ \|H_h^L(\cdot, t) - H(\cdot, t)\|_{H^1(\Gamma(t))} &\leq C_T h^k, & \|V_h^L(\cdot, t) - V(\cdot, t)\|_{H^1(\Gamma(t))} &\leq C_T h^k, \\ \|n_h^L(\cdot, t) - n(\cdot, t)\|_{H^1(\Gamma(t))} &\leq C_T h^k, & \|z_h^L(\cdot, t) - z(\cdot, t)\|_{H^1(\Gamma(t))} &\leq C_T h^k. \end{aligned}$$

平均曲率流和 Willmore 流的 KLL 方法皆是通过使用法向量 n 和曲率 H 的时间演化方程, 利用 n 和 H 自身方程的抛物型结构来控制误差估计中与 $\nabla_{\Gamma[X]}n$ 和 $\nabla_{\Gamma[X]}H$ 相关的量.

在二维闭曲面的情况下, G. Dziuk 求解平均曲率流的方法 (1.15) 收敛性分析的困难之处在于其没有完整的抛物型结构, 即不存在 $\lambda > 0$ 使以下不等式成立:

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_{\mathbf{A}(\mathbf{x}^*)}^2, \quad (4.6)$$

在 2020 年和 2021 年的文章^[35,36] 中, B. Li 证明了矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ 的以下单调性质:

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = \int_0^1 \int_{\Gamma_h^\theta} |(\nabla_{\Gamma_h^\theta} e_h^\theta) \hat{n}_h^\theta|^2 d\theta, \quad (4.7)$$

其中 e_h^θ 是节点向量 $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ 所对应的中间曲面 $\Gamma_h^\theta = (1 - \theta)\Gamma_h[\mathbf{x}^*] + \theta\Gamma_h[\mathbf{x}]$ 上的有限元函数, \hat{n}_h^θ 是曲面 Γ_h^θ 上的单位法向量. 通过使用以上性质, B. Li 在半离散情况下证明了 G. Dziuk 的方法 (1.15) 在使用充分高次有限元时收敛到平均曲率流. 在使用低次有限元的情况下, G. Dziuk 的方法和 BGN 方法求解平均曲率流、Willmore 流或表面扩散流的收敛性至今仍未被证明.

5. 总 结

参数化有限元法以及后来发展出的演化有限元法已经成为曲率流问题的一种有效计算方法, 演化有限元法的矩阵向量形式成为曲率流问题数值分析的一个有效工具. 对几种简单的不保几何结构且不促使网格均匀化的高次演化有限元法, 人们已经证明其逼近平均曲率流、Willmore 流和表面扩散流的收敛性. 但是对包括 BGN 方法在内的许多保几何结构且促使网格均匀化的参数化有限元法, 人们尚无法证明其逼近各类曲率流的收敛性. 对 Willmore 流和 Helfrich 流, 尚无能够保能量递减的全离散参数化有限元法; 对表面扩散流, 目前只有一种非线性隐格式能够同时保面积递减和体积守恒, 尚无线性化半隐格式能够达到同样效果. 如何对各类曲率流构造出能够被证明收敛的保几何结构且促使网格均匀化的线性化半隐式参数有限元法是曲率流数值计算中有待解决的问题.

致谢: 感谢香港理工大学应用数学系的胡嘉顺博士为本文做出修改并提供数值结果.

参 考 文 献

- [1] Allen S M and Cahn J W. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening[J]. Acta Metall., 1979, 27: 1084–1095.
- [2] Bänsch E, Morin P and Nochetto R H. A finite element method for surface diffusion: The parametric case[J]. J. Comput. Phys., 2005, 203: 321–343.
- [3] Bao W, Jiang W, Wang Y and Zhao Q. A parametric finite element method for solid-state dewetting problems with anisotropic surface energies[J]. J. Comput. Phys., 2017, 330: 380–400.
- [4] Bao W and Zhao Q. A structure-preserving parametric finite element method for surface diffusion[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2021, 59: 2775–2799.
- [5] Barrett J W, Deckelnick K and Styles V. Numerical analysis for a system coupling curve evolution to reaction diffusion on the curve[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2017, 55: 1080–1100.

- [6] Barrett J W, Garcke H and Nürnberg R. A parametric finite element method for fourth order geometric evolution equations[J]. *J. Comput. Phys.*, 2007, 222: 441–467.
- [7] Barrett J W, Garcke H and Nürnberg R. Parametric approximation of Willmore flow and related geometric evolution equations[J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2008, 31: 225–253.
- [8] Barrett J W, Garcke H and Nürnberg R. On the parametric finite element approximation of evolving hypersurfaces in \mathbb{R}^3 [J]. *J. Comput. Phys.*, 2008, 227: 4281–4307.
- [9] Barrett J W, Garcke H and Nürnberg R. Numerical computations of the dynamics of fluidic membranes and vesicles[J]. *Phys. Rev. E*, 2015, 92: 052704.
- [10] Barrett J W, Deckelnick K and Nürnberg R. A finite element error analysis for axisymmetric mean curvature flow[J]. *IMA J. Numer. Anal.*, 2021, 41: 1641–1667.
- [11] Barrett J W, Garcke H and Nürnberg R. Chapter 4 - Parametric finite element approximations of curvature-driven interface evolutions[J]. *Handbook of Numerical Analysis*, 2020, 21: 275–423.
- [12] Brakke K A. *The Motion of a Surface by Its Mean Curvature*[M]. Princeton University Press, 1978.
- [13] Cahn J W, Elliott C M and Novick-Cohen A. The Cahn-Hilliard equation with a concentration dependent mobility: motion by minus the Laplacian of the mean curvature[J]. *Euro. Jnl. of Applied Mathematics*, 1996, 7: 287–301.
- [14] Deckelnick K and Dziuk G. Convergence of a finite element method for non-parametric mean curvature flow[J]. *Numer. Math.*, 1995, 72: 197–222.
- [15] Deckelnick K and Dziuk G. On the approximation of the curve shortening flow. In *Calculus of variations, applications and computations (Pont-à-Mousson, 1994)*, volume 326 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, 100–108. Longman Sci. Tech., Harlow, 1995.
- [16] Deckelnick K and Dziuk G. Error estimates for a semi-implicit fully discrete finite element scheme for the mean curvature flow of graphs[J]. *Interfaces & Free Boundaries*, 2000, 2: 341–359.
- [17] Dziuk G. An algorithm for evolutionary surfaces[J]. *Numer. Math.*, 1991, 58: 603–611.
- [18] Dziuk G. Convergence of a semi-discrete scheme for the curve shortening flow[J]. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 1994, 4: 589–606.
- [19] Dziuk G. Discrete anisotropic curve shortening flow[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1999, 36: 1808–1830.
- [20] Dziuk G. Computational parametric Willmore flow[J]. *Numer. Math.*, 2006, 111: 55–80.
- [21] Dziuk G and Elliott C M. Finite elements on evolving surfaces[J]. *IMA J. Numer. Anal.*, 2007, 27: 262–292.
- [22] Dziuk G and Elliott C M. A fully discrete evolving surface finite element method[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2012, 50: 2677–2694.
- [23] Dziuk G and Elliott C M. L^2 -estimates for the evolving surface finite element method[J]. *Math. Comp.*, 2013, 82: 1–24.
- [24] Dziuk G, Lubich C and Mansour D. Runge-Kutta time discretization of parabolic differential equations on evolving surfaces[J]. *IMA J. Numer. Anal.*, 2011, 32: 394–416.
- [25] Elliott C M and Fritz H. On approximations of the curve shortening flow and of the mean curvature flow based on the DeTurck trick[J]. *IMA J. Numer. Anal.*, 2017, 37: 543–603.
- [26] Elliott C M and Stinner B. Modeling and computation of two phase geometric biomembranes using surface finite elements[J]. *J. Comput. Phys.*, 2010, 229: 6585–6612.
- [27] Helfrich W. Elastic properties of lipid bilayers: theory and possible experiments[J]. *Zeitschrift für Naturforschung C*, 1973, 28: 693–703.

- [28] Ishida S, Yamamoto M, Ando R, Hachisuka T. A hyperbolic geometric flow for evolving films and foams[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2017, 36: article 199.
- [29] Huisken G. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres[J]. *J. Differential Geometry*, 1984, 20: 237–266.
- [30] Jiang W and Li B. A perimeter-decreasing and area-conserving algorithm for surface diffusion flow of curves[J]. *J. Comput. Phys.*, 2021, 443: article 110531.
- [31] Kovács B, Li B and Lubich C. A convergent evolving finite element algorithm for mean curvature flow of closed surfaces[J]. *Numer. Math.*, 2019, 143: 797–853.
- [32] Kovács B, Li B and Lubich C. A convergent algorithm for forced mean curvature flow driven by diffusion on the surface[J]. *Interfaces & Free Boundaries*, 2020, 22: 443–464.
- [33] Kovács B, Li B and Lubich C. A convergent evolving finite element algorithm for Willmore flow of closed surfaces[J]. *Numer. Math.*, 2021, 149: 595–643.
- [34] Kovács B, Li B, Lubich C and Power Guerra C A. Convergence of finite elements on an evolving surface driven by diffusion on the surface[J]. *Numer. Math.*, 2017, 137: 643–689.
- [35] Li B. Convergence of Dziuk’s linearly implicit parametric finite element method for curve shortening flow[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2020, 58: 2315–2333.
- [36] Li B. Convergence of Dziuk’s semidiscrete finite element method for mean curvature flow of closed surfaces with high-order finite elements[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2021, 59: 1592–1617.
- [37] Mullins W W. Two dimensional motion of idealized grain boundaries[J]. *J. Appl. Phys.*, 1956, 27: 900–904.
- [38] Mullins W W. Theory of thermal grooving[J]. *J. Appl. Phys.*, 1957, 28: 333–339.
- [39] Pozzi P. Anisotropic curve shortening flow in higher codimension[J]. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2007, 30: 1243–1281.
- [40] Rusu R E. An algorithm for the elastic flow of surfaces[J]. *Interfaces & Free Boundaries*, 2005, 7: 229–239.
- [41] Tiller W A. *The Science of Crystallization*[M]. Cambridge University Press, 1991.
- [42] White B. Evolution of curves and surfaces by mean curvature. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002)*, 525–538. Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [43] Wörner M. Numerical modeling of multiphase flows in microfluidics and micro process engineering: a review of methods and applications[J]. *Microfluid. Nanofluid.*, 2012, 12: 841–886.
- [44] Xu G and Zhang Q. *Geometric Partial Differential Equation Methods in Computational Geometry*[M]. Science Press, 2000.
- [45] Ye C and Cui J. Convergence of Dziuk’s fully discrete scheme for curve shortening flow[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2021, 59: 2823–2842.
- [46] Zhao Q, Jiang W and Bao W. A parametric finite element method for solid-state dewetting problems in three dimensions[J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2020, 42: B327–B352.
- [47] Zhao Q, Jiang W and Bao W. An energy-stable parametric finite element method for simulating solid-state dewetting[J]. *IMA J. Numer. Anal.*, 2021, 41: 2026–2055.

PARAMETRIC FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS OF CURVATURE FLOWS

Li Buyang

(Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China)

Abstract

Many physical phenomena can be mathematically described by curvature-driven free interface motions, such as the evolution of films and foams, crystal growth, and so on. The motion of these films and interfaces often depends on their surface curvature and therefore can be described by the corresponding curvature flows and geometric evolution equations. The numerical computation and error analysis of the related free interface problems are still challenging problems in the field of computational mathematics. The parametric finite element method is a class of effective computational methods for approximating curvature flows, and it has been successful in simulating the evolution of some basic curvature flows, including mean curvature flow, Willmore flow, surface diffusion, and so on. This article focuses on the parametric finite element approximation of curvature flows — its origin, development and some current challenges.

Keywords: free interface; curvature flow, nonlinear; parametric finite element method; evolving finite elements; structure preserving; tangential velocity; mesh points distribution; convergence; error estimation.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K65, 53C44, 65D99, 65M60, 65M12.