

三角形形状因子对地壳形变计算精度的影响^{*}

伍吉仓^{1,2)} 邓康伟¹⁾ 陈永奇¹⁾
(1) 香港理工大学土地测量及地理资讯学系, 香港
(2) 同济大学测量与国土信息工程系, 上海 200092)

摘要 引入三角形内切圆半径与外接圆半径之比值作为三角形形状因子, 讨论利用三角形法计算应变分量的精度与三角形形状因子之间的关系。设计一种涵盖所有三角形形状的方法, 计算分析了用三角形法计算应变分量精度的分布。研究表明: 当三角形形状因子达到 0.36 时, 计算得到的应变分量均方差, 一般不会超过位移数据均方差的 3 倍; 而当三角形形状因子小于 0.1 时, 计算得到的应变分量均方差会陡然增大, 这样的三角形一般不适合用于应变分量的计算。在利用 GPS 观测站组成三角形计算地应变时, 建议所组成的三角形形状因子的阈值应取为 0.1~0.36。

关键词 地壳形变 形状因子 精度 GPS

中图分类号: P227 文献标识码: A

EFFECTS OF TRIANGLE SHAPE FACTOR ON PRECISION OF CRUSTAL DEFORMATION CALCULATED

Wu Jicang^{1,2)}, Conrad Tang¹⁾ and Chen Yongqi¹⁾

(1) Dept. of Land Surveying and Geo-Informatics, The Hong Kong Polytechnic Univ. Hong Kong
(2) Dept. of Surveying, Tongji University, Shanghai 200092)

Abstract In this paper, the shape factor of a triangle is defined as the ratio of interior radius to exterior radius of the triangle. The relationship between the precisions of strain components calculated by the triangular method and the shape factor are studied. A method covering all of different triangle shapes is designed and the distributions of the precisions of strain components are obtained in the cases of different triangle shapes. The study shows that if the shape factor larger than 0.36, the standard deviations of strain components obtained will be less than three times of the standard deviation of displacement; if the shape factor less than 0.1, the standard deviations of strain components obtained will increase considerably and then these triangles are not suitable for calculating the strain components. When the strains are calculated by the triangle composed of GPS stations, the threshold of the shape factor is suggested to be 0.1 to 0.36.

Key words: crustal deformation, shape factor, precision, GPS

* 收稿日期: 2003-04-28

基金项目: 中国香港特别行政区研究基金委员会资助项目(代码: PolyU5073/00E)

作者简介: 伍吉仓, 男, 1963年生, 博士, 同济大学副教授, 主要从事大地测量与地球动力学研究, Email: jcwu@mail.tongji.edu.cn

1 引言

通过两期或两期以上大地形变测量, 我们可以得到各个形变监测点的位移(率)。根据这些位移(率)资料, 可以利用三角形法^[1]来计算每一个三角形所在区域的应变(率)分量及旋转(角速度)分量。显然, 在同样位移观测精度的前提下, 三角形的形状将影响各应变分量的计算精度。传统高精度测边网或测角网, 在网点布设时就已经考虑了三角形形状要合适, 因此三角形的形状对应变分量计算精度的影响不大。但是, 对于目前广泛采用的 GPS 形变监测而言, 由于 GPS 观测站间不需要通视, 基线边长变化也可能比较大, 直接由 GPS 站点组成的三角形, 即使是采用边长尽量相等的 Delauney 法, 得到的三角形形状有一些也可能比较差^[2]。利用这些形状较差的三角形计算得到的应变分量, 精度就偏低, 其结果不能真实反映地壳形变。为此, 本文通过引入三角形内切圆半径与外接圆半径之比值作为三角形形状因子, 来定量讨论三角形形状对计算应变分量精度的影响, 尝试找出三角形形状因子的阈值。当实际三角形形状因子小于该阈值时, 就舍替使用该三角形来计算应变分量, 从而确保得到的应变分量精度同位移观测数据的精度相当。

下面, 首先给出一种涵盖三角形形状的方法, 然后讨论三角形形状因子变化对应变分量计算精度的影响, 从而探讨利用三角形法计算应变分量的形状因子阈值。

2 利用位移计算应变及其精度分析

为了分析三角形形状对形变分量计算精度的影响, 如图 1 建立坐标系, 以三角形顶点 A 为坐标系原点, AB 边为 OX 轴。设 AB 边的边长为 R, AC 边的边长为 R', θ 为 ∠CAB 的之值, 则三角形 3 顶点坐标为: A: (0, 0), B: (R, 0), C: (R' cosθ, R' sinθ)。令:

$$r = \frac{R'}{R} \quad (1)$$

很显然, 当 r, θ 在区间 0 < r < ∞, 0 < θ < 180° 变化时, ΔABC 的形状将涵盖所有三角形形状。为了描述三角形形状, 我们引入三角形形状因子 h, 定义为三角形内切圆半径与外接圆半径之比值, 即:

$$h = \frac{r_0}{r_1} = \frac{4(p - S_a)(p - S_b)(p - S_c)}{S_a S_b S_c} \quad (2)$$

式中: r₀ 是三角形内切圆半径, r₁ 为三角形外接圆半径; S_a, S_b, S_c 表示三角形 3 条边的边长; p 为三角形的半周长^[3]。

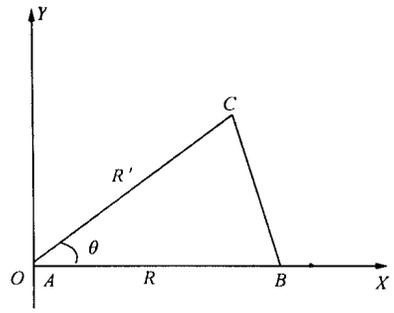


图 1 三角形及坐标系

Fig. 1 The triangle and coordinate system

又设三角形 ABC 各顶点处的位移分别为: A: (u_A, v_A), B: (u_B, v_B), C: (u_C, v_C)。在弹性均匀小变形前提下, 各应变分量可以用下式来计算^[4, 5]:

$$\left. \begin{aligned} u_B - u_A &= \Delta x_{AB} E_{11} + \Delta y_{AB} E_{12} + \Delta y_{AB} \omega \\ v_B - v_A &= \Delta x_{AB} E_{12} + \Delta y_{AB} E_{22} + \Delta x_{AB} \omega \\ u_C - u_A &= \Delta x_{AC} E_{11} + \Delta y_{AC} E_{12} + \Delta y_{AC} \omega \\ v_C - v_A &= \Delta x_{AC} E_{12} + \Delta y_{AC} E_{22} + \Delta x_{AC} \omega \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: Δx_{AB}, Δy_{AB}, Δx_{AC}, Δy_{AC} 分别为 AB 边和 BC 边的坐标增量; E₁₁, E₁₂, E₂₂ 是平面应变张量的 3 个分量; ω 是旋转分量。在小变形的前提下, 各应变分量定义为^[6]:

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ E_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ E_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \omega &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中, u, v 分别表示 X 和 Y 方向的位移分量。

对于(3)式, 由 4 个方程解 4 个未知数, 只要 ABC 三点不在一条直线上, 必有唯一解。设:

$$d = [u_B - u_A \quad v_B - v_A \quad u_C - u_A \quad v_C - v_A]^T \quad (5)$$

$$x = [E_{11} \quad E_{22} \quad E_{12} \quad \omega]^T \quad (6)$$

(3) 式可以写成矩阵形式:

$$Ax = d \quad (7)$$

这里,

$$A = R \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ r \cos \theta & 0 & r \sin \theta & r \sin \theta \\ 0 & r \sin \theta & r \cos \theta & -r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

不难证明:

$$A^{-1} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \\ -\frac{\cos\theta}{2\sin\theta} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2r\sin\theta} & 0 \\ -\frac{\cos\theta}{2\sin\theta} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2r\sin\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

所以(7)式的解为:

$$x = A^{-1}d \quad (10)$$

设位移数据向量方差矩阵为 Σ_d , 根据误差传播

定律, 解向量的方差矩阵为:

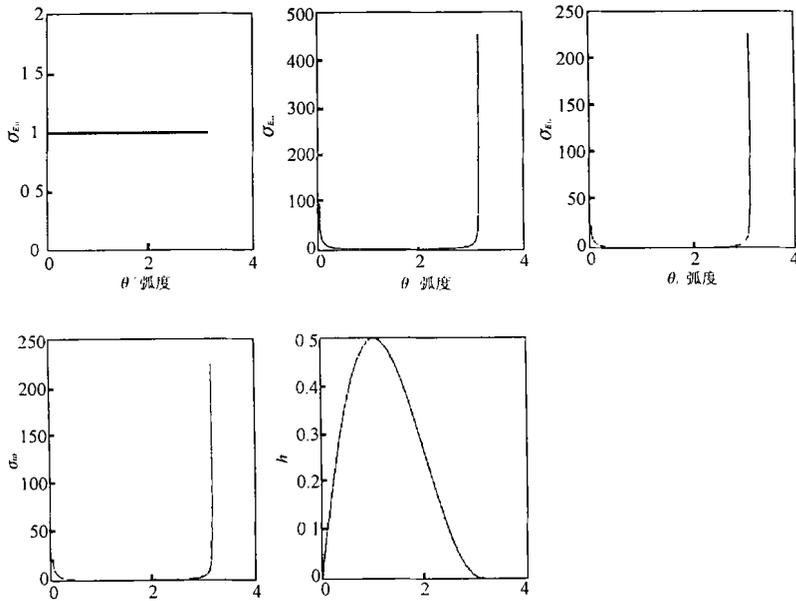
$$\Sigma_x = A^{-1}\Sigma_d(A^{-1})^T \quad (11)$$

为了便于讨论三角形形状因子对于计算应变分量精度的影响, 我们假定位移数据的方差阵为单位矩阵。则(11)式可以简写为,

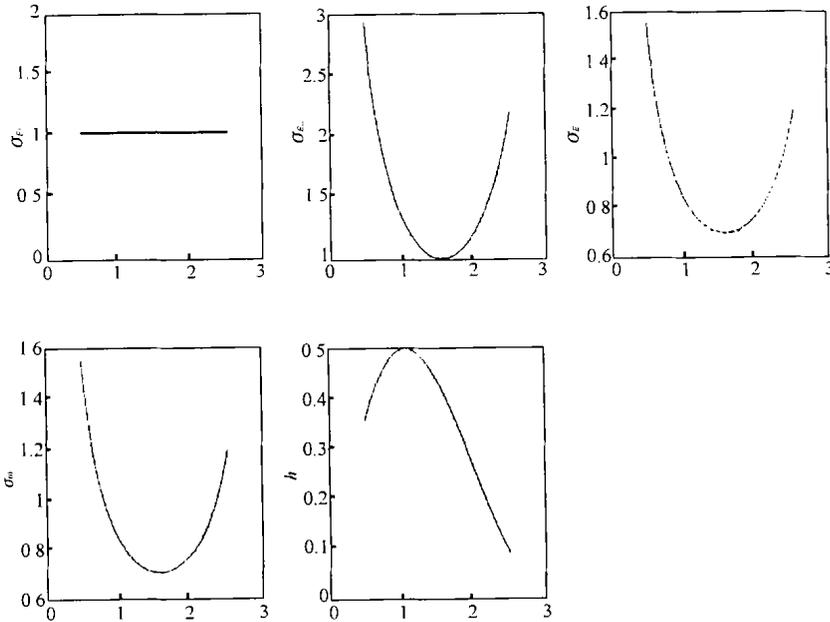
$$\Sigma_x = A^{-1}(A^{-1})^T \quad (12)$$

下面, 我们分两种情况来讨论三角形形状因子对于计算应变精度的影响。

(1) 令 $r = 1, 0 < \theta < 180^\circ$



(a) $0^\circ < \theta < 180^\circ$



(b) $30^\circ < \theta < 140^\circ$

图 2 应变分量均方差及形状因子随角度 θ 的变化

Fig. 2 Standard deviation of strain and shape factor changing with θ

我们假定 $R=1$, 取 θ 从 0° 到 180° 变化, 步长取 0.18° 。图 2(a) 表示 (12) 式的方差矩阵中, 对角线元素的平方根以及形状因子 h 随 θ 的变化曲线。从图 2(a) 中可以看到, 当 θ 接近 0° 或 180° 时, 除了 X 方向应变分量的均方差保持不变(为 1)外, 其他应变分量和旋转分量的均方差都陡然增大, 而三角形形状因子 h 趋于零。另外, 我们从图 2(a) 中还可以看出, 当 $\theta=60^\circ$, 亦即为等边三角形时, 三角形形状因子取得极大值, $h=0.5$ 。

为了考察图 2(a) 曲线底部的变化情况, 我们取 θ 从 0.5 到 2.5 (弧度) 之间变化(对应 30° 到 140°), 结果如图 2(b) 所示。从图 2(b) 可以看出, 除了 X 方向应变分量的均方差 ($\sigma_{E_{11}}$) 保持常数为 1 外, 另外 3 个应变分量的均方差都有最小值, 而且剪应变分量的均方差 ($\sigma_{E_{12}}$) 同旋转分量的均方差 (σ_ω) 完全一致, 这不难从这些应变分量的定义式(4)中得出。由(9)、(12)式, 令 $R=1$ 得:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{E_{22}} &= \frac{1}{\sin\theta} \sqrt{\cos^2\theta + \frac{1}{r^2}} \\ \sigma_{E_{12}} &= \frac{1}{2\sin\theta} \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} \\ \sigma_\omega &= \sigma_{E_{12}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(13) 式对 θ 求导, 令其等于零, 即可求得极小值。如果 $r=1$, 当 $\theta=90^\circ$ 时, (13) 式取极小值为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{E_{22min}} &= 1 \\ \sigma_{E_{12min}} &= \sigma_{\omega min} \approx 0.7 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

另外, 我们从(13)式不难看出, $\sigma_{E_{22}}, \sigma_{E_{12}}$ 等于 σ_ω , 对于任何固定的 r 值, 均在 $\theta=90^\circ$ 时取得极小值, 当然极小值大小是不一样的。从图 2 中还可以看到, 较大的形状因子值对计算应变分量的精度有利, 但是两者之间不存在线性比例关系。

以上是对等腰三角形($r=1$), 讨论得到的结果。下面进一步考虑 r 在 0.1 到 5 之间变化的情况下, 三角形形状因子对应变计算精度的影响(从(13)式可以看出, r 取更大值不影响我们讨论的结果)。

(2) 令 $\theta=30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ; 0.1 < r < 5$

为了讨论非等腰三角形形状对应变分量计算精度的影响, 我们分别固定 θ 为 $30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$, 而让 r 在 0.1 到 5 之间变化, 得到图 3 所示的相应变化曲线。

从图 3 可以看出, 对于不同的 θ 取值, 均方差随 r 变化的特征基本相同, 当 $r < 0.2$ 时, 均方差会陡然增大。如果我们以 3 倍位移均方差作为应变均方差的限值, 可以先由图 3(a)、(b) 得到 r 的下限值, 再根据该 r 下限值从图 3(c) 中得到相应的形状因

子的下限值, 列于表 1 中。

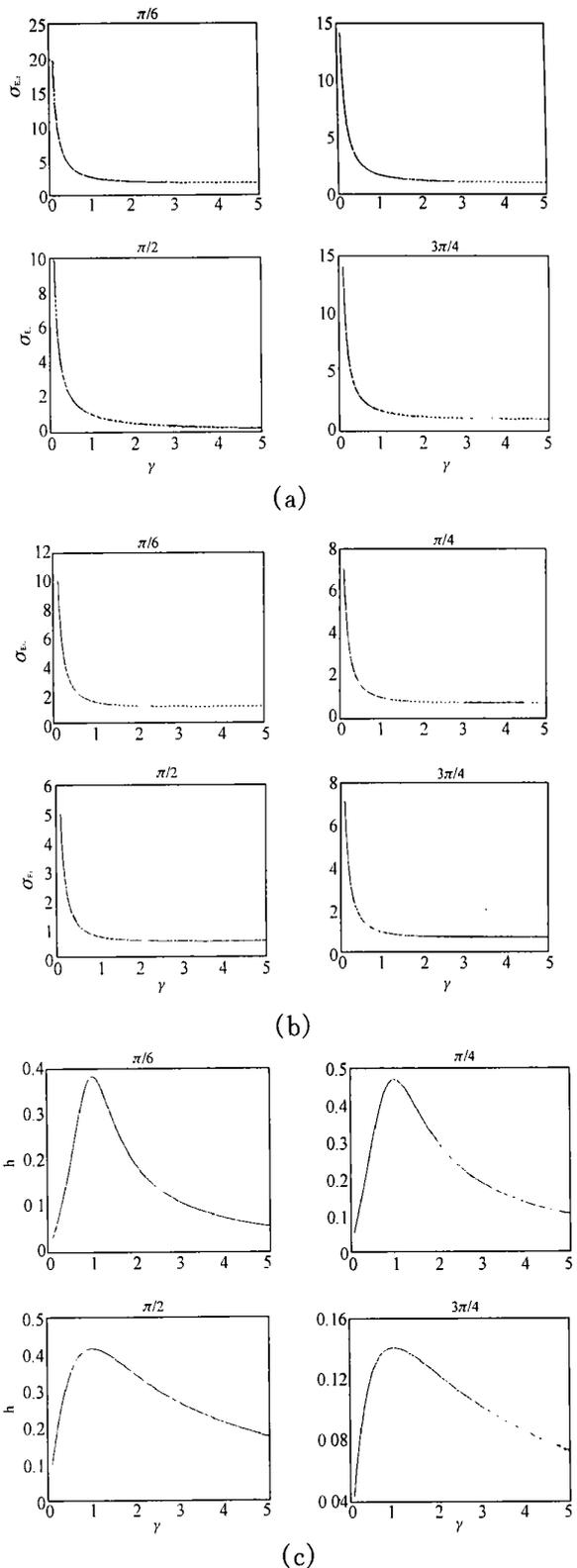


图 3 应变均方差及形状因子随 r 值的变化

Fig. 3 Standard deviation and shape factor changing with r

综合(1)、(2)两种情况, 我们把 $h=0.36$ 作为形状因子的阈值。一般而言, 只要三角形的形状因子 $h > 0.36$, 就可以保证形变分量的均方差不超过位移误差的 3 倍。另外, 我们从图 3(c) 中还可以看

表 1 形状因子的下限值

Tab. 1 The threshold of shape factor		
θ	$\sigma_{E_{22}} < 3$	$\sigma_{E_{21}}(\sigma_{\omega}) < 3$
$\pi/6$	0.36	0.13
$\pi/4$	0.30	0.14
$\pi/2$	0.27	0.16
$3\pi/4$	0.12	0.09

到,对于较大的 r 值($r > 1$), 尽管 h 值小于 0.36, 对应的形变分量均方差估计值(参见图 3(a)、(b))仍小于均匀位移误差的 3 倍。为此,我们可以根据具体情况,将三角形形状因子的阈值适当放宽,比如取 0.25 或更小,但是一般不小于 0.1。如果三角形的形状因子小于 0.1, 则该三角形将不适合用于形变分量的计算。关于该形状因子阈值大小的讨论,可以用于指导我们合理布设 GPS 台站。

3 结论

在用 GPS 监测地壳形变时,通常采用三角形法根据多期观测得到的位移(速度)来计算地应变(率)分量。由于 GPS 测站之间无需通视,我们可以随意组成三角形,采用三角形法来计算地应变(率)分量。本文研究的结果表明,三角形形状对计算地应变分量的精度有影响。文中定义了三角形内切圆半径与外接圆半径之比为三角形的形状因子。当三角形的形状因子达到 0.36 时,计算得到的地应变分量精

度与位移观测值精度相当。而当三角形的形状因子小于 0.1 时,计算得到的地应变分量精度会明显降低。一般来说,在采用三角形法计算地应变时,所组成的三角形形状因子的阈值应控制在 0.1 至 0.36 之间。只有那些形状因子大于阈值的三角形,才可用于计算地应变分量。这样计算得到的地应变,一般能与观测值的精度保持大致相同的水平。

References

- 1 Frank, F C. Deduction of earth strains from survey data [J]. Bulletin of Seismological Society of America, 1966, 56: 35- 42.
- 2 Feigl K L, et al. Space geodetic measurements of crustal deformation in central and southern California, 1984- 1992 [J]. Journal of Geophysical Research, 1993, 98(B12): 21, 667- 21, 712.
- 3 Editorial Group of 'Mathematical Handbook'. Mathematical handbook[M]. People Education Publish House, 1979, 61. (in Chinese)
- 4 Huang Liren and Wang Min. The relative movements and strains of tectonic blocks [J]. Crustal Deformation and Earthquake, 1999, 19(2): 17- 28. (in Chinese)
- 5 Wu Jicang, Conrad Tang and Chen Yongqi. Strain calculation based on baseline length changes and division of tectonic blocks[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2002, 22 (4): 35- 38. (in Chinese)
- 6 Eringen A C. Mechanics of continua[M]. John Wiley & Sons, Inc., 1980, 15- 19.

湖北省地震局召开科技外事工作研讨会

2003 年 5 月 21 日,湖北省地震局召开了科技外事工作研讨会。省地震局吴云副局长、省科技厅国际合作处王锦举副处长以及省地震局部分专家和科技骨干参加了会议。会议由省地震局科技处处长、外事办公室主任秦小军主持。

会议围绕如何发挥省地震局技术优势,更有效地开展国际交流与合作;如何更好地组织国际合作项目,争取得到国家和省政府支持以及如何让更多的青年专家参与国际科技交流与合作进行研讨。会上,蔡惟鑫、吕宠吾、徐菊生、贾民育、王琪等研究员和刘少明工程师介绍了近年来省地震局国际交流与合作的经验及成果,重点介绍了中国与西班牙、越南、德国、美国、比利时之间的合作情况。蔡亚先研究员介绍了目前正在实施的环华数字地震台网的建设和近期在缅甸的工作情况。李辉、姚运生、王琪等研究员和乔学军副研究员畅谈了中国与日本、美国、澳大利亚、意大利以及伊朗未来的合作设想和计划。

王锦举副处长在会上充分肯定了省地震局这些年来国际交流与合作取得的成果,认为省地震局有一支高水平科研队伍,具有明显的学科和技术优势,对外合作领域宽广,应该充分发挥技术和研究优势,与更多国家、团体建立联系和合作,做出更好的成绩。

吴云副局长传达了 2003 年科技外事工作会议精神,对下一步的国际合作与交流工作做了布置与安排,同时指出,省地震局的对外交流能力、应用技术水平虽然已上到了一个比较高的层次,但还需要科技人员不断努力、各级领导不断支持,使我局的科技发展上一个新的台阶。

最后,吴云副局长就省地震局这些年来在国际交流与合作方面取得可喜成绩的过程中,来自各界的支持与关心表示感谢。

科技发展处 刘汉钢