

文章编号: 1003-4722(2004)03-0005-04

# 板梁桥振动响应求解方法的比较

卜建清<sup>1</sup>, 罗韶湘<sup>2</sup>, 朱信群<sup>2</sup>

(1. 石家庄铁道学院交通工程系, 河北 石家庄 050043; 2. 香港理工大学土木与结构工程系, 香港 红磡)

**摘要:** 把板梁桥等效为正交异性板, 车辆等效为在正交异性板上移动的 1 组荷载。根据 Halmiton's 原理和模态叠加原理, 得到系统状态方程。用 3 种方法求解状态方程得到板梁桥的振动响应, 并与卷积积分方法得到的结果进行比较, 相对误差都小于 8%, 表明 3 种方法计算板梁桥的响应是有效且省时的。

**关键词:** 板梁桥; 正交异性板; 移动荷载; 振动响应; 数值模拟

**中图分类号:** U448.212; U441.3 **文献标识码:** A

## Comparison of Methods for Solving Vibration Response of Plate Girder Bridge

*BU Jian-qing<sup>1</sup>, LA W Siu-seong<sup>2</sup>, ZHU Xin-qun<sup>2</sup>*

(1. Department of Communications Engineering, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China)

(2. Civil and Structure Engineering Department, Hong Kong Polytechnic University, Hunghom, China)

**Abstract:** In this paper, the plate girder bridge is modeled as an orthotropic plate, and the vehicle is modeled as a group of loads moving on the orthotropic plate. Based on the Halmiton's theory and modal superposition principle, the state-space equation of the system is obtained. Three methods are used to solve the equation to obtain the vibration response of the plate girder bridge. The results obtained are then compared with the exact response calculated by the convolution integration method, and the relative error of displacements and strains are all less than 8%, which verifies that the three methods for solving the vibration response of the bridge are effective and time-saving.

**Key words:** plate girder bridge; orthotropic plate; moving load; vibration response; numerical simulation

在桥梁设计和管理中, 车桥之间的作用力具有重要的作用。近 20 年以来, 由桥梁的响应识别桥上移动荷载的研究进展很快, 求解桥梁的响应是移动荷载识别模拟研究的重要部分。其中桥梁一般根据宽跨比的大小被抽象为梁<sup>[1-3]</sup> (欧拉梁或铁木辛梁) 或正交异性板<sup>[4-10]</sup>。事实上, 板梁桥抽象为正交异性板更加符合实际一些。

本文把板梁桥抽象为正交异性的矩形板, 把车

辆抽象为 1 组固定间距、常速度行驶在桥面板上的荷载。由 Halmiton's 和模态叠加原理得到系统的状态方程, 用 3 种方法在状态空间计算板梁桥的响应与卷积积分法<sup>[8]</sup>得到的结果进行比较。

### 1 基本理论

#### 1.1 连续状态空间方程

将板梁桥抽象为两边简支 ( $x=0$  和  $x=a$ )、两

收稿日期: 2003-12-30

基金项目: 香港政府科研基金(No. PbyU 5043/02E); 香港理工大学科研基金(No. G-YW98)

作者简介: 卜建清(1968-), 男, 副教授, 1991年毕业于石家庄铁道学院铁道工程专业, 工学学士, 1999年毕业于西南交通大学桥梁与隧道工程专业, 工学硕士, 现在香港理工大学土木与结构工程系作访问学者。

边自由的正交异性板, 承受 1 组移动荷载的正交异性板, 见图 1。

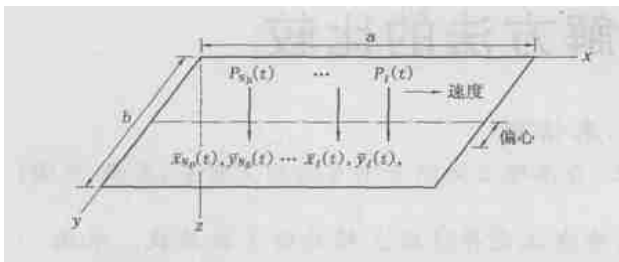


图 1 承受 1 组移动荷载的正交异性板

正交异性板的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \iint_s \left[ D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + (D_{xv_{xy}} + D_{yv_{yx}}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] ds \quad (1)$$

其中,  $v_{xy}$  和  $v_{yx}$  是  $x$  方向和  $y$  方向的泊松比;  $D_x$  和  $D_y$  为  $x$  方向和  $y$  方向的弯曲刚度;  $D_k = \frac{G_{xy}h^3}{12}$ ,  $G_{xy}$  为剪切模量;  $h$  是正交异性板的等效厚度。

正交异性板的动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2} \iint_{00}^{a,b} \dot{w}(x, y, t) \rho h dx dy \quad (2)$$

其中,  $\dot{w}(x, y, t) = \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t}$ ;  $\rho$  为密度;  $a$  和  $b$  分别是正交异性板的长度和宽度。

外力对正交异性板做功可以表示为

$$W = \iint_{00}^{a,b} \sum_{l=1}^{N_p} p_l(t) \delta(x - \bar{x}_l(t)) \delta(y - \bar{y}_l(t)) w(x, y, t) dx dy \quad (3)$$

其中,  $p_l(t) (l = 1, 2, \dots, N_p)$  是作用在正交异性板上的 1 组移动荷载;  $\bar{x}_l(t)$ 、 $\bar{y}_l(t)$  表示荷载  $p_l(t)$  在板上的位置;  $\delta(x)$ 、 $\delta(y)$  是狄拉克函数。

阻尼力对正交异性板做功可以表示为

$$W_c = - \iint_{00}^{a,b} w(x, y, t) c_b \dot{w}(x, y, t) dx dy \quad (4)$$

其中,  $c_b$  是正交异性板的阻尼系数。

根据模态叠加原理, 正交异性板的垂向位移可以写成如下形式

$$w(x, y, t) = \sum_{i,j} \phi_{ij}(x, y) q_{ij}(t) = \sum_{i,j} \psi_i(x) \varphi_j(y) \bar{q}_{ij}(t) \quad (5)$$

其中,  $\psi_i(x)$ 、 $\varphi_j(y) (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$  是相应边界条件下正交异性板的正则化模态;  $m$  和  $n$  是对应  $x$  方向和  $y$  方向的模态阶数;  $\bar{q}_{ij}(t)$  是相对应的模态位移。

将方程(5)写成矩阵形式为

$$w(x, y, t) = \phi Q \quad (6)$$

其中,  $\phi$  是  $1 \times m \cdot n$  阶向量;  $Q$  是  $m \cdot n \times 1$  阶向量。  
 $\phi = \{ \psi_1(x) \varphi_1(y), \psi_1(x) \varphi_2(y), \dots, \psi_1(x) \varphi_n(y), \psi_2(x) \varphi_1(y), \dots, \psi_m(x) \varphi_n(y) \}$

$$Q = \{ q_{11}(t), q_{12}(t), \dots, q_{1n}(t), q_{21}(t), \dots, q_{mn}(t) \}^T$$

由(5)式可以得到点  $(x, y)$  处  $t$  时刻  $x$  方向的应变为

$$\epsilon_x(x, y, t) = \theta Q \quad (7)$$

$$\theta = \{ z_t \psi_1(x) \varphi_1(y), z_t \psi_1(x) \varphi_2(y), \dots, z_t \psi_1(x) \varphi_n(y), z_t \psi_2(x) \varphi_1(y), \dots, z_t \psi_m(x) \varphi_n(y) \}$$

其中,  $z_t$  是中性轴到桥梁下底面的距离;  $\psi_i(x)$  是  $\psi_i(x)$  对  $x$  的二阶导数。 $y$  方向的应变  $\epsilon_y(x, y, t)$  可以类似得到。

将(5)式代入(1)~(4)式中并应用 Hamilton's 原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} w dt = 0$$

得到如下控制方程

$$M \ddot{Q} + C \dot{Q} + K Q = P \quad (8)$$

其中,  $M$ 、 $C$  和  $K$  是  $m \cdot n \times m \cdot n$  阶的模态质量、阻尼和刚度矩阵;  $P$  是  $m \cdot n \times 1$  阶模态力向量;  $Q$ 、 $\dot{Q}$  和  $\ddot{Q}$  是  $m \cdot n \times 1$  阶模态位移、模态速度和模态加速度向量。

$$M = \iint_{00}^{a,b} \rho h \phi^T \phi dx dy$$

$$C = \iint_{00}^{a,b} \phi^T C_b \phi dx dy$$

$$K = \iint_{00}^{a,b} \left[ D_x \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]^T \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] + [D_{xv_{xy}} + D_{yv_{yx}}] \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]^T \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] + D_y \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right]^T \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] + 4D_k \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right]^T \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right] \right] dx dy$$

力向量  $P$  可以写为

$$P = \phi_p p$$

其中,  $\phi_p = [ \phi(\bar{x}_1(t), \bar{y}_1(t))^T \phi(\bar{x}_2(t), \bar{y}_2(t))^T \dots \phi(\bar{x}_{N_p}(t), \bar{y}_{N_p}(t))^T ]^T_{m \cdot n \times N_p}$

$$\text{和 } p = \{ p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_{N_p}(t) \}^T \quad (9)$$

方程(8)写成状态方程形式为

$$\dot{Z} = \bar{K} Z + B_c \phi_p p \quad (10)$$

$$\text{其中, } Z = \begin{bmatrix} Q \\ \dot{Q} \end{bmatrix}_{2 \cdot m \cdot n \times 1}; \bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}_{2 \cdot m \cdot n \times 2 \cdot m \cdot n};$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}_{2 \cdot m \cdot n \times m \cdot n} \quad (11)$$

$I$  为  $m \cdot n$  阶单位矩阵。

## 1.2 离散时间状态空间方程

### 1.2.1 指数方法

由指数方法<sup>[11]</sup> 方程(10)可以转换为下面的时间离散状态方程

$$Z_{j+1} = AZ_j + B\phi_j p_j \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

其中,  $N$  为采样点数;  $Z_{j+1}$  为第  $j+1$  个时刻的状态变量;  $Z_j$ ,  $\phi_j$  和  $p_j$  分别为第  $j$  个时刻的状态变量、荷载所在位置对应的模态和移动荷载的值;  $\tau$  为状态变量  $Z_{j+1}$  和  $Z_j$  之间的时间步长。系数  $A$ 、 $B$  为

$$A = \exp(\bar{K}\tau)$$

$$B = \bar{K}(A - I)B_c$$

### 1.2.2 逆向隐式法方法

相应逆向隐式法<sup>[12, 13]</sup> (Backward implicit method), 方程(12)的系数为

$$A = \begin{bmatrix} (I - \hat{K}^{-1}K\tau^2) & \hat{K}^{-1}M\tau \\ -\hat{K}^{-1}K\tau & \hat{K}^{-1}M \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \hat{K}^{-1}\tau^2 \\ \hat{K}^{-1}\tau \end{bmatrix}$$

其中,  $\hat{K} = M + 2C\tau + K\tau^2$ 。

### 1.2.3 Newmark 广义加速度法

同样, 对应于 Newmark 广义加速度法<sup>[12, 13]</sup> 取  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha = 0.25$  时, 方程(12)中的系数为

$$A = \begin{bmatrix} \left[ I - \tilde{K}^{-1}K \frac{\tau^2}{2} \right] \left\{ I + \tilde{K}^{-1} \begin{bmatrix} M - K \frac{\tau^2}{4} \\ \tau \end{bmatrix} \right\} \frac{\tau}{2} \\ -\tilde{K}^{-1}K\tau & K^{-1} \begin{bmatrix} M - K \frac{\tau^2}{4} \\ \tau \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

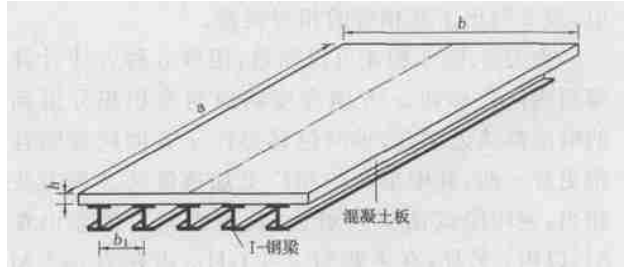
$$B = \begin{bmatrix} \tilde{K}^{-1} \frac{\tau^2}{2} \\ \tilde{K}^{-1} \tau \end{bmatrix}$$

其中,  $\tilde{K} = M + C \frac{\tau}{2} + K \frac{\tau^2}{4}$ 。

求解方程(12)得到状态变量  $Z$ , 代入式(6)和(7)即可得到板梁桥的垂向位移和  $x$  方向的应变。

## 2 算例

将图2所示的混凝土板和5片沿中心线对称分布I形截面钢梁组成的组合板梁桥结构, 简化为沿  $x=0$  和  $x=a$  两边简支另外两边自由的正交异性板, 结构的物理参数列于表1, 由文献[8]中的公式得到正交异性板的等效刚度为  $D_x = 2.415 \times 10^9$  Nm,  $D_y = 2.1813 \times 10^7$  Nm 和  $D_k = 5.3851 \times 10^7$  Nm, 各阶模态的阻尼比均为0.02。



(从左往右分别为1号、2号、3号、4号和5号梁)

图2 混凝土板—钢梁组合桥示意

移动荷载采用轴距为4.26 m 的两轴汽车模型, 2个轴载分别为

$$P1(t) = 62\ 680[1.0 + 0.1\sin(10\pi t) + 0.05\sin(40\pi t)] \text{ N};$$

$$P2(t) = 123\ 320[1.0 - 0.1\sin(10\pi t) + 0.05\sin(50\pi t)] \text{ N};$$

移动荷载沿桥梁中心线以20 m/s 的速度通过, 采样频率为200 Hz,  $x$  方向弯曲模态和  $y$  方向弯曲模态都取3阶( $m=3, n=3$ )。

表1 板梁桥的物理参数

混凝土板	I-梁	横隔板
长度 $a=24.325$ m	间距 $b_1=2.743$ m	间距 $d=4.865$ m
宽度 $b=13.715$ m	腹板厚度 $w_t=0.01111$ m	截面积 $A=0.001548$ m <sup>2</sup>
高度 $h=0.2$ m	腹板高度 $w_h=1.490$ m	截面惯矩 $I_y=0.707 \times 10^{-6}$ m <sup>4</sup>
弹性模量 $E_x=4.1682 \times 10^{10}$ N/m <sup>2</sup>	翼板宽度 $f_w=0.405$ m	截面惯矩 $I_z=2 \times 10^{-6}$ m <sup>4</sup>
弹性模量 $E_y=2.9733 \times 10^{10}$ N/m <sup>2</sup>	翼板厚度 $f_t=0.018$ m	极惯性矩 $J=1.2 \times 10^{-7}$ m <sup>4</sup>
密度 $\rho=3\ 000$ kg/m <sup>3</sup>	密度 $\rho=7\ 800$ kg/m <sup>3</sup>	密度 $\rho=7\ 800$ kg/m <sup>3</sup>
泊松比 $\nu_{xy}=0.3$	弹性模量 $E_y=2.1 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>	
泊松比 $\nu_{yx}=0.3$	泊松比 $\nu=0.3$	

为了研究3种方法的可行性和有效性, 将得到的结果与卷积积分法<sup>[8]</sup> 计算结果进行比较, 相对百分比误差(RPE)为:

$$RPE = \frac{\|\hat{u} - u\|}{\|u\|} \times 100\%$$

其中,  $\hat{u}$  和  $u$  分别是3种方法计算得到的响应和卷积积分求得响应的时间序列,  $\|\cdot\|$  指的是对向量取模。

表2 3种方法计算得到的响应相对卷积积分方法

响应类型	计算结果的误差		%
	垂向位移	$x$ 方向应变	
指数法	2.850	4.413	
逆向隐式法	6.477	7.775	
广义加速度法	2.657	4.239	

图3和4为3种方法和卷积积分法计算的3号梁梁底跨中( $a/2, b/2$ )的垂向位移与  $x$  方向应变响

应,表2列出了其相应的相对误差。

由表2、图3和4可以知道,用该3种方法计算得到垂向位移和 $x$ 方向应变响应与卷积积分得到的响应都接近吻合,垂向位移要比 $x$ 方向应变吻合得更好一些,其中指数法和广义加速度法2种方法相当,逆向隐式法误差最大,其最大相对误差也在8%以内。另外,在主频为2.4 GHz、内存为512 M的奔-4型计算机上该3种方法计算仅用4 s,卷积积分方法却需要115 s完成。

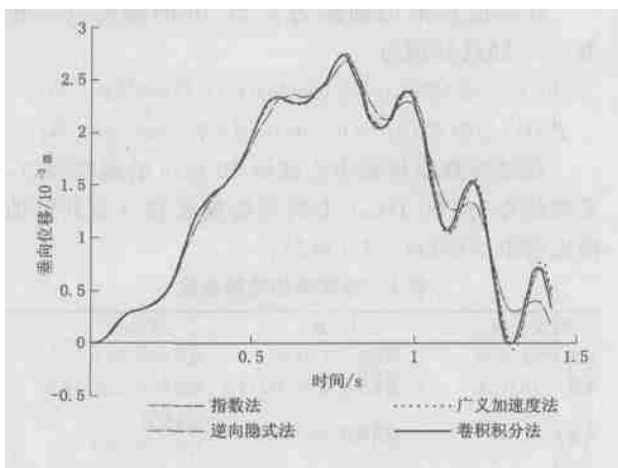


图3 3号梁底跨中垂向位移响应

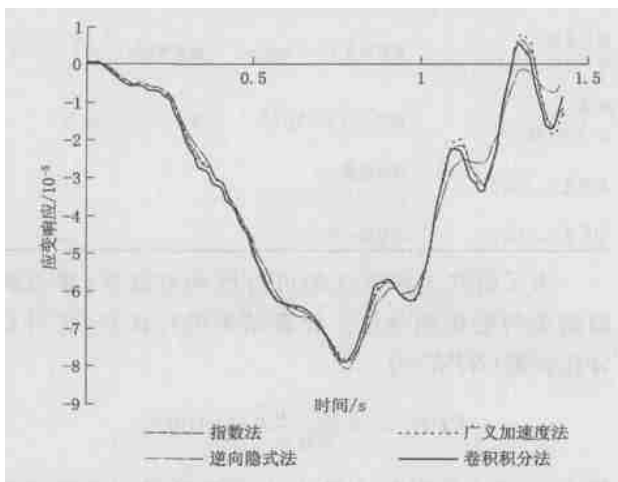


图4 3号梁底跨中应变响应

### 3 结论

采用3种方法在状态空间计算板梁桥的动响应与积分算法得到的结果相比较,垂向位移和应变响应的相对误差都在8%以内,而且计算效率高。可见,文中

的3种计算板梁桥响应的方法是有效的、可行的。

### 参 考 文 献:

- [1] Chan T H T, Law S S, Chan T H Yung, et al. An Interpretive Method for Moving Force Identification[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 219(3): 503-524.
- [2] Law S S, Chan T H T, Zeng Q H. Moving Force Identification - Time Domain Method[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 201(1): 1-22.
- [3] Law S S, Chan T H T, Zeng Q H. Moving Force Identification - A Frequency and Time Domains Approach [J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control ASME, 1999, 121(3): 394-401.
- [4] 袁响荣,陈恩利,杨韶普.由正交异性板的响应识别移动荷载[J].振动、测试与诊断,1998,18(3):201-205.
- [5] Zhu X Q, Law S S. Dynamic Behavior of Orthotropic Rectangular Plate under Moving Loads[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2003, 129(1): 79-87.
- [6] Zhu X Q, Law S S. Dynamic Load on Continuous Multi-lane Bridge Deck From Moving Vehicles [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 251(4): 697-716.
- [7] Zhu X Q, Law S S. Time Domain Identification of Moving Loads on Bridge Deck [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2003, 125(2): 187-198.
- [8] Zhu X Q, Law S S. Identification of Moving Loads on an Orthotropic Plate [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2001, 123(2): 238-244.
- [9] Zhu X Q, Law S S. Dynamic Axle and Wheel Loads Identification: Laboratory Studies [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 268(5): 855-879.
- [10] Zhu X Q, Law S S. Orthotropic Function in Moving Loads Identification on a Multi-span Bridge [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 245(2): 329-345.
- [11] J N Juang. Applied System Identification [M]. New Jersey: 1994.
- [12] Trujillo D M, Busby H R. Practical Inverse Analysis in Engineering [M]. New York: 1997.
- [13] Bathe K J, Wilson E L. Numerical Methods in Finite Element Analysis [M]. New Jersey: 1976.