

文章编号: 1000-6788(2004) 03-0087-04

无界凸多面体由“和形式”向“交形式”的转化

魏权龄¹, 汪 俊¹, 闫 洪²

(1. 中国人民大学运筹学与数量经济研究所, 北京 100872; 2. 香港理工大学商学院, 香港)

摘要: 凸多面体可以表示成一组线性不等式的交, 称这种表示为凸多面体的“交形式”; 同时, 它也可以由其全部极点和对应的凸多面锥的全部极方向生成, 称之为“和形式”. 将一个凸多面体在“和形式”与“交形式”之间进行转化是数学规划中的一个基本问题. 本文使用类似线性规划中的“大 M-方法”, 构造性地将无界凸多面体“和形式”的凸多面体转化为“交形式”, 并用数值例子说明了该算法的应用过程.

关键词: 无界凸多面体; “和形式”; “交形式”; “大 M-方法”

中图分类号: O221

文献标识码: A

The Method of Transferring the Unbounded Polyhedron of Sum-form to Its Intersection-form

WEI Quan-ling¹, WANG Jun¹, YAN Hong²

(1. Institute of Operations Research and Mathematical Economics, Renmin University of China, Beijing 100872, China;

2. Faculty of Business, The Hong Kong Polytechnic University, Hung Hom, Kowloon, Hong Kong, China)

Abstract: A polyhedron can be represented by a set of linear constraints, which we call “intersection-form”, or by a convex combination of finite extreme points and non-negative combination of finite extreme rays, which we call “sum-form”. To transfer a polyhedron between the “sum-form” and the “intersection-form” is a fundamental problem in the mathematical programming. This paper supplies a method of transferring the unbounded polyhedron of sum-form to its intersection-form by using the “Big-M Method”. Numerical example is also given to demonstrate the processes of our transferring algorithm.

Key words: unbounded polyhedron; “Sum-form”; “intersection-form”; “Big-M Method”

1 前言

考虑凸多面体

$$P = \{x \mid a_i x \geq b_i, x \geq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

其中

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E^n$$

$$a_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T \in E^n, i = 1, 2, \dots, m$$

$$b_i \in E^1, i = 1, 2, \dots, m$$

一般, 上述有限多个不等式所确定的凸多面体 P 被称为“交形式”. 由凸多面体分解定理(见[1])可知, 它也可由其全部极点和相应凸多面锥的全部极方向生成, 即:

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^k d^i \lambda_i \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} + \left\{ \sum_{j=1}^{k'} y^j \beta_j \mid \beta_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k' \right\}$$

其中 $d^i \in E^n, i = 1, 2, \dots, k$ 是凸多面体的 k 个极点; $y^j \in E^n, j = 1, 2, \dots, k'$ 是凸多面锥 $\{y \mid a_i y \geq 0, y \geq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$ 的 k' 个极方向. 这种表示被称为凸多面体的“和形式”.

特别, 当 Q 为有界凸多面体时, 可以表示成其全部极点的凸组合, 即

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^k d^i \lambda \mid \sum_{i=1}^k \lambda = 1, \lambda \geq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\}$$

当 Q 为凸多面锥时, 可以表示成其全部极方向的非负组合, 即

$$Q = \left\{ \sum_{j=1}^{k'} y^j \beta_j \mid \beta_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k' \right\}$$

将凸多面体在两种形式之间转化的算法是数学规划中的一个重要而基本的问题. 凸多面体由“交形式”向“和形式”的转化即求一个“交形式”凸多面体的全部极点及对应的凸多面锥的极方向. 许多文献, 如文献 [2]—[6] 等都提出了转化的算法, 但在处理退化问题时, 通常会比较复杂. 我们提出了一种递归算法, 有效地避免了因退化带来的麻烦^[7-10]. 在数学规划中, 这种转化具有广泛的应用^[11-13].

将凸多面体由“和形式”向“交形式”转化是上述问题的逆问题. 若能将一个凸多面体由“和形式”转化为“交形式”, 即可知道一个凸多面体顶点及极方向的性质和结构. 在数据包络分析 (DEA, Data Envelopment Analysis) 中, 可以利用这种转化研究生产前沿面的结构^[7,9]. 对凸多面体结构的研究还可以用来得到线性多目标规划有效解的结构^[14].

文献 [8] 给出了有界凸多面体及凸多面锥由“和形式”向“交形式”转化的方法, 并用凸集分离定理对相关的结论进行了证明. 本文考虑将无界凸多面体由“和形式”转化为“交形式”. 我们使用类似线性规划中的“大-M 方法”, 构造性地将“和形式”的凸多面体转化为“交形式”, 并对相关的结论进行了证明. 最后文章给出了一个数值例子演示了该方法的应用过程.

2 凸多面体由“和形式”向“交形式”的转化

考虑“和形式”的无界凸多面体 Q :

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^k d^i \lambda \mid \sum_{i=1}^k \lambda = 1, \lambda \geq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} + \left\{ \sum_{j=1}^{k'} y^j \beta_j \mid \beta_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k' \right\}$$

其中 $d^i \in E^n$, $i = 1, 2, \dots, k$ 是 E^n 中的 k 个点; $y^j \in E^n$, $j = 1, 2, \dots, k'$ 是 E^n 中的 k' 个方向. 构造集合 $S(M) \subset E^{n+1}$:

$$S(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mid \begin{cases} d^i \text{ 与 } x \geq x_{n+1}, (d^i + M y^j) \text{ 与 } x \geq x_{n+1}, \\ x \in E^n, i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, k' \end{cases} \right\}$$

记

$$Q(M) = \left\{ \sum_{i=1}^k d^i \lambda + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k'} (d^i + M y^j) \lambda_j \mid \lambda \geq 0, i = 1, 2, \dots, k; \right. \\ \left. \lambda_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, k'; \sum_{i=1}^k \lambda + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k'} \lambda_j = 1 \right\}$$

其中 $M > 0$ 是一个很大的数. 可知 $S(M)$ 是 E^{n+1} 中的一个凸多面锥, 它可以表示成其全部极方向的非负组合 (求凸多面锥全部极方向的算法可见文献 [7]—[10]). 设 $S(M)$ 的全部极方向为

$$\left[a_l(M)^T, b_l(M) \right]^T, \quad l = 1, 2, \dots, m$$

由文献 [7], 有

$$S(M) = \left\{ \sum_{l=1}^m \begin{pmatrix} a_l(M) \\ b_l(M) \end{pmatrix} \mu_l \mid \mu_l \geq 0, a_l(M) \in E^n, b_l(M) \in E^1, l = 1, 2, \dots, m \right\} \quad (2)$$

由文献 [8], 可知

$$Q(M) = \left\{ x \mid a_l^T(M) x \geq b_l(M), l = 1, 2, \dots, m \right\}$$

有下面的定理.

定理 1 对 $M > 0$ 有 $Q(M) \subset Q$.

证明 对 $\forall M > 0$, 有

$$Q(M) = \left\{ \sum_{i=1}^k d^i \lambda + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k'} (d^i + M y^j) \lambda_j \mid \lambda \geq 0, i = 1, 2, \dots, k; \right.$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, k'; \sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k'} \lambda_j = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^k d^i \lambda_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k'} d^i \lambda_j + M \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k'} y^j \lambda_j \mid \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k \right. \\ & \quad \left. \lambda_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, k'; \sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k'} \lambda_j = 1 \right\}. \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^k d^i (\lambda_i + \sum_{j=1}^{k'} \lambda_j) + M \sum_{j=1}^{k'} y^j (\sum_{i=1}^k \lambda_j) \mid \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k; \right. \\ & \quad \left. \lambda_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, k'; \sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k'} \lambda_j = 1 \right\} \\ &\subset Q \end{aligned}$$

得证.

引理 1 对 $0 < M' < M$, 有 $Q(M') \subset Q(M)$.

证明 对 $0 < M' < M$, 易见 $\exists \alpha \in (0, 1)$ 有

$$d^i + M' y^j = \alpha d^i + (1 - \alpha)(d^i + M y^j),$$

从而 $Q(M') \subset Q(M)$ 成立. 得证.

定理 2 对 $\forall x \in Q$, 存在 $M_0 > 0$ 使得 $x \in Q(M_0)$.

证明 对任意 $x^0 \in Q$, 存在 $\lambda^0 \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \beta_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, k'$, 使得

$$x^0 = \sum_{i=1}^k d^i \lambda_i + \sum_{j=1}^{k'} y^j \beta_j.$$

不妨设 $\lambda^0 \neq 0$, 令 $M_0 = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{k'} \beta_j > 0, \gamma_j = \frac{1}{M_0} \beta_j$, 则

$$\sum_{i=2}^k \lambda_i + \sum_{j=1}^{k'} \gamma_j = \sum_{i=2}^k \lambda_i + \frac{1}{M_0} \sum_{j=1}^{k'} \beta_j = \sum_{i=2}^k \lambda_i + \lambda = 1 \tag{3}$$

故

$$\begin{aligned} x^0 &= \sum_{i=1}^k d^i \lambda_i + \sum_{j=1}^{k'} y^j \beta_j = \sum_{i=2}^k d^i \lambda_i + d^1 \lambda + \sum_{j=1}^{k'} y^j \beta_j \\ &= \sum_{i=2}^k d^i \lambda_i + d^1 (\frac{1}{M_0} \sum_{j=1}^{k'} \beta_j) + \sum_{j=1}^{k'} y^j M_0 \gamma_j \\ &= \sum_{i=2}^k d^i \lambda_i + d^1 \sum_{j=1}^{k'} \gamma_j + \sum_{j=1}^{k'} M_0 y^j \gamma_j = \sum_{i=2}^k d^i \lambda_i + \sum_{j=1}^{k'} (d^1 + M_0 y^j) \gamma_j \end{aligned}$$

由 (3), 可得 $x^0 \in Q(M_0)$. 得证.

由定理 1, 定理 2 及引理 1, 容易得到如下定理.

定理 3 对 $M > 0$, 有

$$Q = \bigcup_{M>0} Q(M) = \lim_{M \rightarrow \infty} Q(M)$$

使用“大 M-方法”构造出 $S(M)$ 后, 通过求凸多面体全部极方向的方法即可得到集合 $Q(M)$. 上述定理表明, 当 $M \rightarrow \infty$ 时, $Q(M) = Q$. 这实际上给出了一种将无界凸多面体由“和形式”向“交形式”转化的方法.

3 数值例子

在本节中, 我们用一个例子演示将一个一般的凸多面体由“和形式”向“交形式”转化.

考虑一个凸多面体 $Q \subseteq E^2$, Q 有两个极点 $(0, 0)^T, (0, 1)^T$ 和两个极方向 $(1, 0)^T, (1, 1)^T$, 即 Q 具有下面的“和形式”

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda \mid \lambda + \lambda = 1, \lambda \geq 0, \lambda \geq 0 \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \beta \mid \beta \geq 0, \beta \geq 0 \right\}$$

依式(1)构造集合 $S(M) \subset E^3$ 如下

$$S(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ M & M \\ M & 0 \\ M & M+1 \\ M & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq x_3 \right\}$$

其中 M 是一个很大的数. $S(M) \subset E^3$ 是一个凸多面锥. 由[10]可求得 $S(M)$ 的全部极方向为 $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(-1, 0, -M)^T$, $(1, -1, -1)^T$, $(0, -1, -M-1)^T$, 从而

$$S(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mu_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mu_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -M \end{pmatrix} \mu_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mu_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -M-1 \end{pmatrix} \mu_5 \mid \mu_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 5 \right\}$$

于是

$$Q(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \leq M, x_1 - x_2 \geq -1, x_2 \leq M+1 \right\}$$

当 $M \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} Q(M) = Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 - x_2 \geq -1 \right\}$$

即为本例中 Q 的“交形式”. 如图 1 所示.

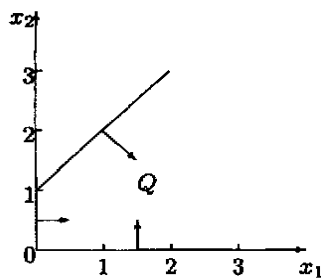


图 1

参考文献:

- [1] Dantzig G B. Linear Programming and Extension[M]. Princeton University Press, 1963.
- [2] Avis D, Fukuda K. A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra[J]. Discrete Computational Geometry, 1992, 8:295-313.
- [3] Balinski M L. An algorithm for enumerating all vertices of a convex polyhedra[J]. Computing, 1975, 15:181-193.
- [4] Charnes A, Cooper W W, Huang Z M, Sun D B. Relations between half-space and finitely generated cones in polyhedral cone-ratio DEA models[J]. International Journal of System Science, 1991, 22: 2057-2077.
- [5] Dyer M E. The complexity of vertex enumeration methods[J]. Mathematics of Operations Research, 1983, 8:381-402.
- [6] Greenberg H. An algorithm for determining redundant inequalities and all solutions on polyhedra[J]. Numerical Mathematics, 1975, 24: 19-26.
- [7] Wei Q L, Yan H. A method of transferring cones of intersection-form to cones of sum-form and its applications in data envelopment analysis models[J]. International Journal of Systems Science, 2000, 31(5): 629-638.
- [8] Wei Q L, Yan H. A method of transferring polyhedron between the intersection-form and the sum-form[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2001, 41:1327-1342.
- [9] Wei Q L, Hao G, Yan H. Characteristics and construction method of surface and weak surface of DEA production possibility[D]. Hong Kong Polytechnic University, Research Report of Department of Management, 2003.
- [10] 魏权龄, 闫洪. 广义最优化理论和模型[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [11] Chvatal V. Linear Programming[M]. Freeman, 1983.
- [12] Nemhauser G L, Wolsey L A. Integer and Combinatorial Optimization[M]. Wiley, 1983.
- [13] Rubin D S. Vertex generation and cardinality constrained linear programs[J]. Operations Research, 1975, 23: 555-564.
- [14] Yan H, Wei Q L, Wang J. Constructing efficient solutions structure of linear multiobjective programming[R]. Hong Kong Polytechnic University, Research Report of Department of Management, 2003.