DOI: 10.13667/j.cnki.52-1046/th.2004.03.023

弹性系统最小能量原理及三角形常应变单元的矩阵对号入座法

郑州轻工学院(450000) 宋学谦
香港理工大学 C. Y. Chan
上海电机高专(200240) 刘鹄然

摘要：矩阵对号入座法是我校曾庆元院士对有限元的本质贡献，本文推广其博大精深思想。

关键词：矩阵 三角形单元 有限元 弹性系统

The Minium Energy Principle of Elastic System and The Matrix Method for the Triangle Unite of FEM

Song Xue-qian C. Y. Chan Liu Gu-ran

Abstract: The matrix method is an important improvement to the finit element method, This paper applyed this method to the triangle unit of FEM.

Key words: matrix; triangle unit; finit element; elastic system

1 最小势能原理

假想结构承受 n 个载荷：$p_1, p_2, \ldots, p_n$。

载荷的位移：$\delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_n$。

则结构应变能 U 等于载荷所做的功，理论上每一个力都可以通过载荷——位移系统表达为相应位移的函数。

任一机械结构体系的势能为该体系从实际形态运动到某一参考形态所有作用所做的功。若以卸载形态为参考形态，则势能为结构从其受载形态到卸载位置所做的功。

载荷势能：$U_{外} = -\sum P_i \delta_i$

弹性势能：$U_{形} = \dfrac{1}{2}\iint_D \left\{[\sigma]^T[\varepsilon]\right\} h\,dx\,dy$

总势能：$U_{总} = U_{形} + U_{外} = U - \sum P_i \delta_i$

把位移表示为 $f_1, f_2, \ldots f_n$。

则：$U_{总} = U - \sum P_i f_i$

根据最小能量原理，如果弹性结构的势能表达为节点未知位移的函数，那么当位移值使总势能取得极小值时，系统处于平衡状态。因此，通过对 $U_{总}$ 进行变分，可求得 $U_{总}$ 取极小值时位移值 U、V 然后由几何方程求出应变向量 $[\varepsilon]$，由物理方程求出应力向量 $[\sigma]$。

即有：

$$\frac{\partial U_{总}}{\partial f_i} = \frac{\partial U}{\partial f_i} - P_i = 0$$

得到 n 个联系方程：

$$\frac{\partial U_{总}}{\partial f_1} = \frac{\partial U}{\partial f_1} - P_1 = 0 \cdots\cdots \frac{\partial U_{总}}{\partial f_n} = \frac{\partial U}{\partial f_n} - P_n = 0$$

2 单元体应力计算

根据应力公式：

$[\sigma] = [D][\varepsilon]$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}$$

$[\sigma] = [D][B] = [D][B][\delta] = [S][\delta]$

$[S] = [D][B] = [S_i \quad S_j \quad S_m]$

$$[S_i] = [D][B_i] = \frac{1}{2(1-\mu^2)\Delta}\begin{bmatrix}b_i & \mu c_i\\ \mu b_i & c_i\\ \dfrac{1-\mu}{2}c_i & \dfrac{1-\mu}{2}b_i\end{bmatrix}$$

$$[S_j] = [D][B_j] = \frac{1}{2(1-\mu^2)\Delta}\begin{bmatrix}b_j & \mu c_j\\ \mu b_j & c_j\\ \dfrac{1-\mu}{2}c_j & \dfrac{1-\mu}{2}b_j\end{bmatrix}$$

$$[S_m] = [D][B_m] = \frac{1}{2(1-\mu^2)\Delta}\begin{bmatrix}b_m & \mu c_m\\ \mu b_m & c_m\\ \dfrac{1-\mu}{2}c_m & \dfrac{1-\mu}{2}b_m\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} du = [\varepsilon]^T[\sigma]\,t\,dx\,dy\\ \sigma = [S][\delta]\\ \varepsilon = [B][\delta]\end{cases}$$

单元应变能为：

$$u = \frac{1}{2}\iint t\,dx\,dy[\delta]^T[B]^T[D][B][\delta]$$
$$= \frac{1}{2}t\Delta[\delta]^T[B]^T[D][B][\delta]$$

作者简介：宋学谦，男(1964—)，华中科技大学在读硕士，讲师，研究工程力学及机械中应用。

收稿日期：2003—7—21

令：

$$[K]=\iint[B]^T[D][B]h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint[B]^T[s]h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则：

$$u=\frac{1}{2}[\delta]^T[K][\delta]$$

$$[K]_{2n\times 2n}=\begin{bmatrix}K_{11} & \cdots & K_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ K_{1n} & \cdots & K_{nn}\end{bmatrix}$$

$$[K_{ij}]_{2\times 2}=\frac{Et}{4(1-\mu^2)\Delta}\begin{bmatrix}b_ib_j+\frac{1-\mu}{2}c_ic_j & \mu b_ic_j+\frac{1-\mu}{2}c_ic_j\\ \mu c_ib_j+\frac{1-\mu}{2}b_ic_j & c_ic_j+\frac{1-\mu}{2}b_ib_j\end{bmatrix}$$

称为子刚度矩阵。

则：

$$U_{总}=\frac{1}{2}[\delta]^T[K][\delta]-\sum P_if_i$$

3　单元矩阵对号入座法

根据最小位能原理，对 $U_{总}$ 求变分：

$$\frac{\partial U_{总}}{\partial u_i}=0$$

$$p_i=\begin{bmatrix}K_{ii} & K_{ii+1} & K_{ij} & K_{ij+1} & K_{im} & K_{im+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\ v_i\\ u_j\\ v_j\\ u_m\\ v_m\end{bmatrix}$$

即：$[K][\delta]=[P]$

根据矩阵的格式可以看出，刚度矩阵为一个对称的高度稀疏矩阵，对于一个节点 i 的位移来说，若节点 j 与节点 i 位于同一单元上，则 $[K_{ij}]_{2\times 2}\neq 0$，否则子刚度矩阵为 0 矩阵。这样就根据刚度矩阵的特点，求出子刚度矩阵后填入刚度矩阵的相应位置，从而形成刚度矩阵的计算格式，这就是矩阵对号入座的基本原理。

4　弹性动力学总势能守恒原理与总体矩阵对号入座法

对于弹性动力学系统，利用达朗伯原理，通过添加惯性力，把动力学问题转化成静力学系统问题，从而得到弹性动力学系统最小能量原理。在忽略系统阻尼的情况下，系统受力主要是面积力、体积力和集中力，其中添加的惯性力为体积力。

通过以上分析，得出弹性动力学系统势能表达式：

$$U_{总}=U_j+U_p+U_q+U_R$$

可以看出，相对于静力学问题，进行动力学计算时，计算格式是一样的，只不过受力矩阵发生了变化（添加惯性力），刚度矩阵没有改变。因此，只要稍做变化同样适用。

弹性动力学系统最小势能原理简洁表达式为：

$$\partial_\varepsilon U_{总}=\partial_\varepsilon(U_j+U_p+U_q+U_R)=0$$

按矩阵对号入座法则，有：

$$p_i=\begin{bmatrix}\cdots K_{ii} & K_{ii+1} & \cdots K_{ij} & K_{ij+1} & \cdots K_{im} & K_{im+1} & \cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ u_i\\ v_i\\ \vdots\\ u_j\\ v_j\\ \vdots\\ u_m\\ v_m\\ \vdots\end{bmatrix}$$

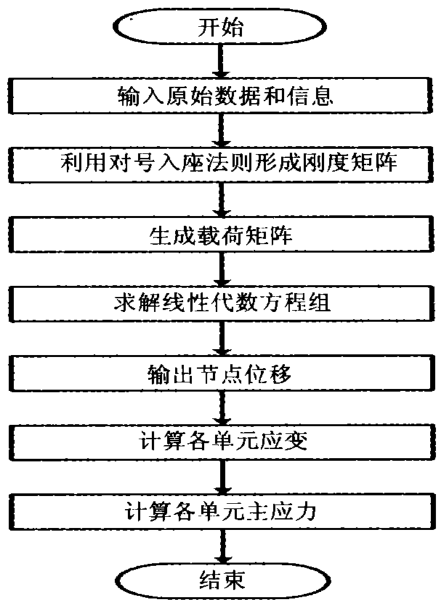
$$Q_i=\begin{bmatrix}\cdots K_{i+1i} & K_{i+1i+1} & \cdots K_{i+1j} & K_{i+1j+1} & \cdots K_{i+1m} & K_{i+1m+1} & \cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ u_i\\ v_i\\ \vdots\\ u_j\\ v_j\\ \vdots\\ u_m\\ v_m\\ \vdots\end{bmatrix}$$

同样可以得到计算格式：

$$[K][\delta]=[P][J]$$

其中：P 为广义力矩阵；J 为惯性力矩阵。

5　计算流程图



6　效果评价

利用矩阵对号入座法则生成刚度矩阵，减少了运算量，避免了单刚变成总刚和子空间迭代，特别适用于形状和结构较为复杂的动力机械结构，带有分支结构的弹性系统等的计算，可以根据计算要求混合使用矩形单元和三角形单元。

参考文献

1　谢轶权. 弹塑性力学有限元. 高教出版社.