第 37卷第 4期　数学的实践与认识　Vol. 37 No. 4
2007年 2月　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　Feb., 2007

DEA的交形式生产可能集及其应用

魏权龄[1]，马赞甫[2]，阎　洪[3]

(1, 2. 中国人民大学经济学院，北京　100872)
(3. 香港理工大学物流学系，香港)

摘要:　DEA理论、模型及方法可用以评价给定决策单元之间的相对有效性,其在经济学中的应用体现在经验生产可能集的构造上. DEA的生产可能集有两种等价形式—和形式及交形式.相比较而言,交形式更具几何直观性及计算便利性.

关键词:　数据包络分析;生产可能集;交形式;和形式

1 引　　言

自 Charnes等人提出 C^2R 模型[1]以来,数据包络分析(Data Envelopment Analysis, DEA)的发展非常迅速,现已成为一个新的研究领域.在通常的 DEA模型中,满足某些公理假设的生产可能集都是以“和形式”(Sum Form)出现的.利用凸多面锥的和形式与交形式之间的转换方法[2,3],可将 DEA的生产可能集的和形式转换为与之等价的“交形式”(Intersection Form)[4],其中包括了几个经典的 DEA模型: C^2R 模型, BC^2 模型[5], FG模型[6], ST模型[7],以及 WY模型[8].

本文利用生产可能集交形式,讨论了传统的 DEA技术效率指数,并给出了相应的计算表达式.同时,利用交形式的生产可能集,可以很容易地讨论决策单元的规模收益为不变、递增、递减以及是否呈现“拥挤”(Congestion)等现象,给出一些判断的充要条件.可以看出,利用交形式,甚至不必采用通常的单纯形方法即可实现对决策单元的评价.此外,在交形式下,可以采用决策单元与生产前沿面之间的最短距离作为效率评价标准,定义新的效率指数,很容易地给出相应的表达式.

DEA生产可能集的交形式可用以处理“海量”数据.利用交形式容易判断新增加的决策单元的相对有效性.即以评估为目的的数据挖掘的新领域—“DEA评测机”[9].

2 生产可能集的公理体系及其和形式

在数理经济学中,为了研究经济系统的结构,往往需要引进一些公理,对技术的描述也不例外.设观测到的 n 个决策单元(Decision Making Units)为:

$$(x_j, y_j),\quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

其中 $x_j \in R^m$, $y_j \in R^s$ 分别表示第 j 个决策单元的投入与产出数据,且 $x_j > 0$, $y_j > 0$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 为确定经验生产可能集

收稿日期: 2006-12-15

基金项目: 本文的研究得到国家自然科学基金(70371058; 70531040),中国人民大学“985”工程重点建设项目基金以及香港 CERG基金(B-Q00U)资助

$$T=\{(x,y)\mid \text{投入 } x\in R^m,\text{产出 } y\in R^s\}$$

的具体形式,必须先假设其所满足的公理体系,公理体系相当于是对不同的技术特征的描述.一般地,DEA理论中经验生产可能集的公理体系包括[5, 8, 10, 11]:

1) 平凡性公理: $(x_j,y_j)\in T,\ j=1,2,\cdots,n$.

2) 凸性公理: 若 $(x,y)\in T,\ (\hat{x},\hat{y})\in T,\ \mathrm{T}\in[0,1]$, 则 $\mathrm{T}(x,y)+(1-\mathrm{T})(\hat{x},\hat{y})\in T$.

3. 1) 投入无效公理(经济学中称之为投入自由处置性): 若 $(x,y)\in T,\ \hat{x}\geqq x$, 则 $(\hat{x},y)\in T$.

3. 2) 产出无效公理(经济学中称之为产出自由处置性): 若 $(x,y)\in T,\ \hat{y}\leqq y$, 则 $(x,\hat{y})\in T$.

4. 1) 锥性公理(经济学中称之为规模收益不变): 若 $(x,y)\in T,\ \mathrm{T}\in[0,\infty)$, 则 $\mathrm{T}(x,y)\in T$.

4. 2) 收缩性公理(经济学中称之为规模收益非增): 若 $(x,y)\in T,\ \mathrm{T}\in[0,1]$, 则 $\mathrm{T}(x,y)\in T$.

4. 3) 扩张性公理(经济学中称之为规模收益非减): 若 $(x,y)\in T,\ \mathrm{T}\in[1,\infty)$, 则 $\mathrm{T}(x,y)\in T$.

5) 最小性公理: 集合 T 是满足以上 1)—4) 中某些公理的集合中之最小者(详见以下 a),b),c),d) 及 e)).

相应于 C^2R 模型, BC^2 模型, FG模型, ST模型及 WY模型的"和形式"的综合生产可能集为:①

$$\hat{T}=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j+\delta_4 s^-=x,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j-s^+=y,\ y\geqq 0,\ s^-,s^+\geqq 0,\\ \delta_1\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j+\delta_2(-1)^{\delta_3}\lambda_{n+1}\right)=\delta_1,\ \lambda_j\geqq 0,\ j=1,2,\cdots,n,n+1\end{array}\right.\right\}\qquad(2)$$

其中 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ 是取值为1或0的参数.在 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ 不同取值组合下对应着不同技术特征的生产可能集:

a) 当 $(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)=(0,*,*,1)$ 时, $\hat{T}=\hat{T}_{C^2R}$, 其中

$$\hat{T}_{C^2R}\}=\{(x,y)\mid\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\leqq x,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j\geqq y\geqq 0,\ \lambda_j\geqq 0,\ j=1,2,\cdots,n\}$$

可知 $\hat{T}_{C^2R}$ 是由公理 1), 2), 3. 1), 3. 2), 4. 1)及 5)所唯一确定.

b) 当 $(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)=(1,0,*,1)$ 时, $\hat{T}=\hat{T}_{BC^2}$, 其中

$$\hat{T}_{BC^2}=\{(x,y)\mid\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\leqq x,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j\geqq y\geqq 0,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\ \lambda_j\geqq 0,\ j=1,2,\cdots,n\}$$

可知 $\hat{T}_{BC^2}$ 是由公理 1), 2), 3. 1), 3. 2)及 5)所唯一确定.

c) 当 $(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)=(1,1,0,1)$ 时, $\hat{T}=\hat{T}_{FG}$, 其中

$$\hat{T}_{FG}=\{(x,y)\mid\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\leqq x,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j\geqq y\geqq 0,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\leqq 1,\ \lambda_j\geqq 0,\ j=1,2,\cdots,n\}$$

① 符号说明: 本文中以字母表示向量时,罗马字母为列向量,希腊字母为行向量;与 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ 的不同取值相对应,本文中的"○"可为 C^2R, BC^2, FG, ST,或者 WY.

可知 T_{FG} 是由公理 1), 2), 3. 1), 3. 2), 4. 2)及 5)所唯一确定.

d) 当 $(W_1, W_2, W_3, W_4) = (1, 1, 1, 1)$ 时, $\hat{T} = \hat{T}_{ST}$, 其中

$$\hat{T}_{ST} = \{(x, y) | \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leqq x, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geqq y \geqq 0, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geqq 1, \lambda_j \geqq 0, j = 1, 2, \cdots, n\}$$

可知 $\hat{T}_{ST}$ 是由公理 1), 2), 3. 1), 3. 2), 4. 3)及 5)所唯一确定.

e) 当 $(W_1, W_2, W_3, W_4) = (1, 0, *, 0)$ 时, $\hat{T} = \hat{T}_{WY}$, 其中

$$\hat{T}_{WY} = \{(x, y) | \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = x, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geqq y \geqq 0, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqq 0, j = 1, 2, \cdots, n\}$$

可知 $\hat{T}_{WY}$ 是由公理 1), 2), 3. 2)及 5)所唯一确定.

3 生产可能集的交形式

根据(1)给出的 n 个决策单元 (x_j, y_j), $j = 1, 2, \cdots, n$, 定义一个多面锥 Q:

$$Q = \{(k, \_, W_1\_{}_0) | k x_j - \_ y_j + W_1\_{}_0 \geqq 0, j = 1, 2, \cdots, n, W_4 k \geqq 0, \_ \geqq 0, W_1 W_2 (-1)^{W_3} \_{}_0 \geqq 0\}$$

根据多面锥交形式转化为和形式的方法[2,3],可将上面交形式的多面锥转化为以下的和形式:

$$Q = \{\sum_{k=1}^{l} T_k (k^k, \_^k, W_1\_{}_0^k) | T_k \geqq 0, k = 1, 2, \cdots, l\}$$

其中 $(k^k, \_^k, W_1\_{}_0^k)(k = 1, 2, \cdots, l)$ 为 Q 的全部极方向,且 $(k^k, \_^k) \neq 0, W_4 k^k \geqq 0, \_^k \geqq 0, W_1 W_2 (-1)^{W_3} \_{}_0^k \geqq 0, k = 1, 2, \cdots, l$. 若令

$$\bar{T} = \{(x, y) | x \geqq 0, y \geqq 0, k^k x - \_^k y + W_1\_{}_0^k \geqq 0, k = 1, 2, \cdots, l\} \tag{3}$$

则有下面的定理 1,证明参见文献[4].

定理 1 $\hat{T} = \bar{T}$.

根据定理 1, $\bar{T}$ 是生产可能集 $\hat{T}$ 的等价形式,我们称之为"交形式"的生产可能集.不难看出,存在一个 $k'(1 \leqq k' \leqq l)$, 满足 $k^{k'} \neq 0$, 且存在一个 $k''(1 \leqq k'' \leqq l)$, 满足 $\_^{k''} \neq 0$. 与经典的 DEA 模型及生产可能集相对应,在 W_1, W_2, W_3, W_4 的不同取值下,集合 $\bar{T}$ 有以下几种:

a) 相应于 $\{C^2R\}$ 的生产可能集:

$$\bar{T}_{C^2R} = \{(x, y) | x \geqq 0, y \geqq 0, k_{C^2R}^k x - \_{}_{C^2R}^k y \geqq 0, k = 1, 2, \cdots, l_{C^2R}\}$$

其中 $k_{C^2R}^k \geqq 0, \_{}_{C^2R}^k \geqq 0, (k_{C^2R}^k, \_{}_{C^2R}^k) \neq 0, k = 1, 2, \cdots, l_{C^2R}$;

b) 相应于 $\{BC^2\}$ 的生产可能集:

$$\bar{T}_{BC^2} = \{(x, y) | x \geqq 0, y \geqq 0, k_{BC^2}^k x - \_{}_{BC^2}^k y + \_{}_{0BC^2}^k \geqq 0, k = 1, 2, \cdots, l_{BC^2}\}$$

其中 $k_{BC^2}^k \geqq 0, \_{}_{BC^2}^k \geqq 0, (k_{BC^2}^k, \_{}_{BC^2}^k) \neq 0, \_{}_{0BC^2}^k \in R^1, k = 1, 2, \cdots, l_{BC^2}$;

c) 相应于 FG 的生产可能集:

$$\bar{T}_{FG} = \{(x, y) | x \geqq 0, y \geqq 0, k_{FG}^k x - \_{}_{FG}^k y + \_{}_{0FG}^k \geqq 0, k = 1, 2, \cdots, l_{FG}\}$$

其中 $k_{FG}^k \geqq 0, \_{}_{FG}^k \geqq 0, (k_{FG}^k, \_{}_{FG}^k) \neq 0, \_{}_{0FG}^k \geqq 0, k = 1, 2, \cdots, l_{FG}$;

d) 相应于 ST 的生产可能集:

$$\bar{T}_{ST} = \{(x, y) | x \geqq 0, y \geqq 0, k_{ST}^k x - \_{}_{ST}^k y + \_{}_{0ST}^k \geqq 0, k = 1, 2, \cdots, l_{ST}\}$$

其中 $k_{ST}^k \geqq 0, \_{}_{ST}^k \geqq 0, (k_{ST}^k, \_{}_{ST}^k) \neq 0, \_{}_{0ST}^k \leqq 0, k = 1, 2, \cdots, l_{ST}$;

e) 相应于 WY 的生产可能集:

$$\bar{T}_{WY} = \{(x, y) | x \geqq 0, y \geqq 0, k_{WY}^k x - \_{}_{WY}^k y + \_{}_{0WY}^k \geqq 0, k = 1, 2, \cdots, l_{WY}\}$$

其中 $\mathrm{k}^{k}_{WY}\in R^{m}, \_^{k}_{WY}\geqq 0, (\mathrm{k}^{k}_{WY}, \_^{k}_{WY})\neq 0, \_^{k}_{0WY}\in R^{1}, k=1,2,\cdots,l_{WY}$.

这里需要指出的是,仅仅由 DEA生产可能集的交形式,也可以看出不同生产可能集所满足的公理体系.在交形式下计算效率指数,以及评测规模收益状况和是否呈现拥挤现象显得更为简便,我们将在第 4节、第 5节分别予以讨论.

4 效率指数及投影

一般地,利用 DEA方法评价决策单元的有效性有两种观点: 一种侧重于投入尽可能的最小化,对应于投入— 综合 DEA模型;另一种则侧重产出的最大化,对应于产出— 综合 DEA模型.考虑第 $j_0(1\leqq j_0\leqq n)$ 个决策单元,为方便起见,记其投入 x_{j_0}为 x_0, 产出 y_{j_0}为 y_0, 并称之为决策单元 (x_0, y_0), 其相对有效性评价借助以下线性规划问题.

a) 投入—综合 DEA模型:

$$\begin{cases} \min\theta \\ \text{s. t.} \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j + W_4 s^- = \theta x_0, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j \geqq y_0 \\ \quad W_1\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j + W_2(-1)^{W_3}\lambda_{n+1}\right) = W_1 \\ \quad W_4 s^- \geqq 0, \lambda_j \geqq 0, j = 1,2,\cdots,n,n+1 \end{cases} \tag{4. a}$$

即

$$\begin{cases} \min\theta = \bar{\theta} \\ \text{s. t.}\ (\theta x_0, y_0)\in \hat{T} \end{cases} \tag{4. b}$$

b) 产出— 综合 DEA模型:

$$\begin{cases} \max z \\ \text{s. t.} \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j + W_4 s^- = x_0, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j \geqq z y_0 \\ \quad W_1\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j + W_2(-1)^{W_3}\lambda_{n+1}\right) = W_1 \\ \quad W_4 s^- \geqq 0, \lambda_j \geqq 0, j = 1,2,\cdots,n,n+1 \end{cases} \tag{5. a}$$

即

$$\begin{cases} \max z = \bar{z} \\ \text{s. t.}\ (x_0, z y_0)\in \hat{T} \end{cases} \tag{5. b}$$

定义 1 若决策单元 j_0的投入效率指数 $\bar{\theta}=1$, 则称其为投入— 弱 DEA有效.

定义 2 若决策单元 j_0的产出效率指数 $\bar{z}=1$, 则称其为产出— 弱 DEA有效.

上述综合模型综合了五种经典 DEA模型: C^2R, BC^2, FG, ST, 以及 WY.在确定了交形式的生产可能集之后,我们立即可以得到相应于 (4. b)及 (5. b)的交形式的综合 DEA模型.

a) 投入—综合 DEA模型 (交形式):

$$\begin{cases} \min\theta = \bar{\theta} \\ \text{s. t.}\ \mathrm{k}^{k}(\theta x_0) - \_^{k} y_0 + W_1 \_^{k}_{0} \geqq 0 \\ \quad k = 1,2,\cdots,l \end{cases} \tag{6}$$

因此,交形式下的投入效率指数为

$$\bar{\theta} = \max_{k\neq 0}\left\{\frac{\_^{k} y_0 - W\_^{k}_{0}}{k^{k} x_0}\right\} \leqq 1 \tag{7}$$

令 $(\bar{x}_0,\bar{y}_0) = (\bar{\theta}x_0, y_0)$, 在侧重投入最小化下,我们称 $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 为 (x_0, y_0) 在生产可能集前沿面上的投影.

b) 产出— 综合 DEA模型 (交形式):

$$\begin{cases} \max z = \bar{z} \\ \text{s. t.}\ \ k^{k} x_0 - \_^{k}(z y_0) + W\_^{k}_{0} \geqq 0 \\ \quad k = 1, 2, \cdots, l \end{cases} \tag{8}$$

可得到

$$\bar{z} = \min_{k\neq 0}\left\{\frac{k^{k} x_0 + W\_^{k}_{0}}{\_^{k} y_0}\right\} \geqq 1 \tag{9}$$

同样,在侧重产出最大化目标下,我们称 $(x_0, \bar{z}y_0)$ 为 (x_0, y_0) 在生产可能集前沿面上的投影.

决策单元 (x_0, y_0) 与生产可能集前沿面的贴近程度也可以由 (x_0, y_0) 到交形式的生产可能集边界的最短距离 (即通常的欧氏距离) $\bar{d}$ 所定义,即有

$$\bar{d} = \min_{k}\left\{\frac{k^{k} x_0 - \_^{k} y_0 + W\_^{k}_{0}}{\sqrt{\| k^{k} \|^2 + \| \_^{k} \|^2}}\right\} = \frac{k^{\bar{k}} x_0 - \_^{\bar{k}} y_0 + W\_^{\bar{k}}_{0}}{\sqrt{\| k^{\bar{k}} \|^2 + \| \_^{\bar{k}} \|^2}} \tag{10}$$

不难看出,当且仅当 $\bar{d} = 0$时, (x_0, y_0) 是弱 DEA有效的.对于决策单元 (x_0, y_0), 由于与其距离最近的超平面为 $k^{\bar{k}} x - \_^{\bar{k}} y + W\_^{\bar{k}}_{0} = 0$, 通过简单计算,不难得到 (x_0, y_0) 在该前沿平面上的投影为

$$(\bar{x}_0,\bar{y}_0) = \left(x_0 - \frac{\bar{d}}{\sqrt{\| k^{\bar{k}} \|^2 + \| \_^{\bar{k}} \|^2}} k^{\bar{k}T}_{0},\ y_0 + \frac{\bar{d}}{\sqrt{\| \_^{\bar{k}} \|^2 + \| \_^{\bar{k}} \|^2}} \_^{\bar{k}T}_{0}\right) \tag{11}$$

当 $d > 0$时, $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 是在投入与产出两方面都较 (x_0, y_0) 有所改进的一种新投影.

5 规模收益状况

本节讨论决策单元的规模收益状况,以及决策单元是否呈现拥挤现象,所使用的均为输出— DEA模型.利用输出— DEA模型: WY, FG, ST,可以判别决策单元的规模收益状况,是否呈现“拥挤”现象.有如下判别定理[8].

定理 2 设决策单元 (x_0, y_0) 在 DEA模型 WY下为弱 DEA有效,则

a) (x_0, y_0) 为规模收益递增的充要条件是: (x_0, y_0) 在 DEA模型 ST下为弱 DEA有效,但在 DEA模型 FG下不为弱 DEA有效;

b) (x_0, y_0) 为规模收益不变的充要条件是: (x_0, y_0) 在 DEA模型 ST下为弱 DEA有效,同时在 DEA模型 FG下也为弱 DEA有效;

c) (x_0, y_0) 为规模收益递减的充要条件是: (x_0, y_0) 在 DEA模型 ST下不为弱 DEA有效,但在 DEA模型 FG下为弱 DEA有效;

d) (x_0, y_0) 为呈现拥挤现象的充要条件是: (x_0, y_0) 在 DEA模型 ST下不为弱 DEA有效,且在 DEA模型 FG下也不为弱 DEA有效.

利用 DEA生产可能集的“交”形式,判别决策单元的规模收益较为方便.为此,先给出以下引理:

引理 1　对于由(8)给出的 DEA模型,决策单元 (x_0, y_0)为弱 DEA有效的充要条件是:存在一个 $\bar{k}$, $1\leqq \bar{k}\leqq l$, $\mu^{\bar{k}}\neq 0$, 使得 $\omega^{\bar{k}} x_0 - \mu^{\bar{k}} y_0 + \delta_1\mu_0^{\bar{k}} = 0$.

证明　根据(9)式,充分性是显然的;现以反证法证明其必要性.设 $\bar{z} = 1$, 考虑以下两种情况:

a) 若对一切 $k = 1, 2, \cdots, l$, 都有 $\omega^k x_0 - \mu^k y_0 + \delta_1\mu_0^k > 0$, 由(9)式可知 $\bar{z} > 1$, 矛盾.

b) 若对一切满足 $\omega^k x_0 - \mu^k y_0 + \delta_1\mu_0^k = 0$的 k, 都有 $\mu^k = 0$, 则对其余的 k, 满足 $\omega^k x_0 - \mu^k y_0 + \delta_1\mu_0^k > 0$, 应用(9)式,同样有 $\bar{z} > 1$, 得到矛盾.

由 a), b)可知,必存在一个 $\bar{k}$, $1\leqq \bar{k}\leqq l$, 使得 $\omega^{\bar{k}} x_0 - \mu^{\bar{k}} y_0 + \delta_1\mu_0^{\bar{k}} = 0$, 且 $\mu^{\bar{k}}\neq 0$.

根据引理 1,我们可得到定理 3.

定理 3　设 (x_0, y_0)在 DEA模型 WY下为弱 DEA有效,则

a) (x_0, y_0)为规模收益递增,当且仅当以下两个条件同时成立:

i) 不存在 $k'(1\leqq k'\leqq l_{FG})$, 使得 $\mu^{k'}_{FG}\neq 0$, $\omega^{k'}_{FG}x_0 - \mu^{k'}_{FG}y_0 + \mu^{k'}_{0FG} = 0$;

ii) 存在 $k''(1\leqq k''\leqq l_{ST})$, 使得 $\mu^{k''}_{ST}\neq 0$, $\omega^{k''}_{ST}x_0 - \mu^{k''}_{ST}y_0 + \mu^{k''}_{0ST} = 0$.

b) (x_0, y_0)为规模收益不变,当且仅当以下两个条件同时成立:

i) 存在 $k'(1\leqq k'\leqq l_{FG})$, 使得 $\mu^{k'}_{FG}\neq 0$, $\omega^{k'}_{FG}x_0 - \mu^{k'}_{FG}y_0 + \mu^{k'}_{0FG} = 0$;

ii) 存在 $k''(1\leqq k''\leqq l_{ST})$, 使得 $\mu^{k''}_{ST}\neq 0$, $\omega^{k''}_{ST}x_0 - \mu^{k''}_{ST}y_0 + \mu^{k''}_{0ST} = 0$.

c) (x_0, y_0)为规模收益递减,当且仅当以下两个条件同时成立:

i) 存在 $k'(1\leqq k'\leqq l_{FG})$, 使得 $\mu^{k'}_{FG}\neq 0$, $\omega^{k'}_{FG}x_0 - \mu^{k'}_{FG}y_0 + \mu^{k'}_{0FG} = 0$;

ii) 不存在 $k''(1\leqq k''\leqq l_{ST})$, 使得 $\mu^{k''}_{ST}\neq 0$, $\omega^{k''}_{ST}x_0 - \mu^{k''}_{ST}y_0 + \mu^{k''}_{0ST} = 0$.

d) (x_0, y_0)为呈现拥挤现象,当且仅当以下两个条件同时成立:

i) 不存在 $k'(1\leqq k'\leqq l_{FG})$, 使得 $\mu^{k'}_{FG}\neq 0$, $\omega^{k'}_{FG}x_0 - \mu^{k'}_{FG}y_0 + \mu^{k'}_{0FG} = 0$;

ii) 不存在 $k''(1\leqq k''\leqq l_{ST})$, 使得 $\mu^{k''}_{ST}\neq 0$, $\omega^{k''}_{ST}x_0 - \mu^{k''}_{ST}y_0 + \mu^{k''}_{0ST} = 0$.

最后我们必须指出: (i) 定理 2及定理 3中关于决策单元 (x_0, y_0)在 DEA模型 WY下为弱 DEA有效的假设是必不可少的.如果没有这一假设,往往会出现判断的紊乱.这是因为决策单元的规模收益状况以及是否呈现拥挤现象都是与投入规模的大小相关的,在经济学中关于这类问题的讨论都是在决策单元为技术有效的前提下进行的. (ii) 当决策单元 (x_0, y_0)在 WY模型下不为弱 DEA有效时,我们需利用输出 DEA模型 WY,先求出 (x_0, y_0)在 $\hat{T}_{WY}$生产前沿面上的投影 $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (x_0, \bar{z}y_0)$, 其中

$$\bar{z} = \min_{\mu^k_{WY}\neq 0}\left\{\frac{\omega^k_{WY}x_0 + \mu^k_{0WY}}{\mu^k_{WY}y_0}\right\}$$

我们认为原决策单元 (x_0, y_0)的规模收益状况,以及是否呈现拥挤现象与其投影点 $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$的规模收益状况是相同的.即先做投影,再根据投影进行决策单元的评价.

6　结　　论

DEA生产可能集具有两种等价形式:和形式与交形式.相比较而言,交形式具有以下一

些优点:

a) 交形式的几何直观性更强,边界尤为清晰,清楚地刻画了投入与产出之间的对应关系.或者说,确定了技术“黑匣子”的形状.

b) 效率指数的计算可以用明显的公式给出,对规模收益状况及是否呈现拥挤现象的判别变得更为直接,甚至不需使用单纯形方法.

c) 利用交形式,可借助欧式距离定义新的效率评价方法,它可看作是对技术有效性测度理论中距离函数[12]的补充.

d) 容易判别新增加的决策单元的相对有效性,对处理“海量”数据较为便利.以它为基础的“DEA评测机”是数据挖掘理论的一个新领域.

参考文献:

[1] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units[J]. European Journal of Operational Research, 1978, 2: 429- 444.

[2] Hong Yan, Quanling Wei. A method of transferring cones of intersection form to cones of sum form and its applications in data envelopment analysis models[J]. International Journal of Systems Science, 2000, 31(5): 629- 638.

[3] Quanling Wei, Hong Yan. A Method of transferring polyhedron between the intersection-form and the sum-form[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2001, 41: 1327- 1342.

[4] Quanling Wei, Hong Yan, Hao Gang. Characteristics and construction method of surface and weak surface of DEA production possibility set[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 327: 1055- 1074.

[5] Banker R D, Charnes A, Cooper W W. Some models for the estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis[J]. Management Science, 1984, 30: 1078- 1092.

[6] Färe R, Grosskopf S. A nonparametric cost approach to scale efficiency[J]. Journal of Econometrics, 1985, 87: 594- 604.

[7] Seiford L M, Thrall R M. Recent development in DEA, the mathematical programming approach to frontier analysis[J]. Journal of Econometrics, 1990, 46: 7- 38.

[8] Quanling Wei, Hong Yan. Congestion and returns to scale in Data Envelopment Analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 153: 641- 660.

[9] Quanling Wei, Hong Yan. Data Envelopment analysis assessment machines[C]. in S. Tsumoto, C. W. Clifton etc. (eds.), Sixth International Conference on Data Mining-Workshops (ICDMW′06), Dec. 2006, Hong Kong.

[10] Gang Yu, Quanling Wei, Patrick Brockett, Li Zhou. Construction of all DEA efficient surfaces of the production possibility set under the generalized data envelopment analysis model[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 95: 491- 510.

[11] Banker R D. Estimating most productive scale size using data envelopment analysis[J]. European Journal of Operational Research, 1985, 87: 594- 604.

[12] Shephard R W. Theory of Cost and Production Functions[M]. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[13] 韩松. DEA方法进行规模收益分析的几点注记[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(7): 65- 71.

[14] 魏权龄. 评价相对有效性的DEA方法—— 运筹学的新领域[M]. 中国人民大学出版社, 1988.

[15] 魏权龄, 阎洪. 广义最优化理论和模型[M]. 科学出版社, 2003.

[16] 魏权龄. 数据包络分析[M]. 科学出版社, 2004.

The Intersection form of Production Possibility Set in Dea and Its Applications

WEI Quan-ling[1], MA Zan-fu[2], YAN Hong[3]

(1, 2. School of Economics, Renmin University of China, Beijing 100872, China)
(3. Department of Logistics, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong)

Abstract The DEA theory, model and method are used to evaluate the relative efficiency among the given decision making units, the applications in the economics are reflected in the construction of production possibility set. Production possibility set in DEA has two equivalent forms: sum form and intersection form. In comparison, the later one has more geometric visualization and convenience of calculation.

Keywords data envelopment analysis; production possibility set; intersection form; sum form