第49卷第6期 数学学报中文版 Vol.49, No.6
2006年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Nov., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)06-1297-06 文献标识码: A

Hilbert 空间中非扩张映象的最近的公共不动点的逼近问题

张石生

宜宾学院数学系 宜宾 644007
E-mail: sszhang_1@yahoo.com.cn

李向荣 陈志坚

香港理工大学应用数学系 香港
E-mail: majlee@polyu.edu.hr; machanck@polyu.edu.hr

摘 要 本文在 Hilbert 空间的框架下, 研究无限族非扩张映象 T_1, $T_2, \ldots$ 的迭代程序 $x_{n+1} = \lambda_{n+1}y + (1-\lambda_{n+1})T_{n+1}x_n$ 的收敛性问题. 在适当的条件下, 证明了该迭代序列收敛于这一非扩张映象族的最近的公共不动点. 其结果改进和推广了引文中相应的结果.

关键词 公共不动点; 非扩张映象; 最近点投影

MR(2000) 主题分类 47H09, 65J15

中图分类 O177.91

On the Problem of Nearest Common Fixed Point of Nonexpansive Mappings

Shi Sheng ZHANG

Department of Mathematics, Yibin University, Yibin 644007, P. R. China
E-mail: sszhang_1@yahoo.com.cn

Joseph LEE Chi Kin CHEN

Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, P. R. China
E-mail: majlee@polyu.edu.hr; machanck@polyu.edu.hr

Abstract The purpose of this paper is to study the convergence problem of the iteration scheme $x_{n+1} = \lambda_{n+1}y + (1-\lambda_{n+1})T_{n+1}x_n$ for a family of infinitely many nonexpansive mappings $T_1, T_2, \ldots$ in a Hilbert space. It is proved that under suitable conditions this iteration scheme converges strongly to the nearest common fixed point of this family of nonexpansive mappings. The results presented in this paper extend and improve the corresponding results.

Keywords common fixed point; the family of nonexpansive mappings; nearest point projection

MR(2000) Subject Classification 47H09, 65J15

Chinese Library Classification O177.91

收稿日期: 2005-02-06; 接受日期: 2005-09-15

1 引言及预备

关于迭代序列

$$x_{n+1} = \lambda_{n+1} y + (1-\lambda_{n+1}) T_{n+1} x_n, \ \forall n \geq 0 \tag{1.1}$$

对一个、有限个或无穷多个非扩张映象 T_1, $T_2, \ldots$ 的收敛性问题, 已被许多人引入和研究 (见文 [1-8] 及其参考文献). 本文在 Hilbert 空间的框架下, 研究无限族非扩张映象 T_1, $T_2, \ldots$ 的迭代程序 (1.1) 的收敛性问题.

本文处处假定 H 是一具内积 $\langle \cdot,\cdot \rangle$ 和范数 $||\cdot||$ 的实 Hilbert 空间, C 是 H 之一非空闭凸子集. N 和 $\mathbf{R}$ 分别表正整数和非负实数的集. 我们分别用 $\to$ 和 $\rightharpoonup$ 表强收敛和弱收敛.

一映象 $T: C \to C$ 称为非扩张的, 如果 $||Tx - Ty|| \leq ||x-y|| \ \forall x, \ y \in C$. 我们用 $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ 表 T 的不动点的集合, $P_C : H \to C$ 是 H 到 C 上的最近点投影, 即, 对每一 $x \in H$, $P_C x$ 是 C 中, 使得 $||x - P_C x|| = \inf_{c \in C} ||x - c||$ 的唯一元.

为方便起见, 首先追述某些概念和引理.

引理 1.1 (半闭原理)[9] 如果 $T: C \to C$ 是一非扩张映象, $x_n \rightharpoonup x$ 且 $(x_n - Tx_n) \to y$, 则有 $(x - Tx) = y$.

特别, 如果 $y = 0$, 则 x 是 T 的不动点.

引理 1.2[10] 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 是三个非负的实序列满足条件

$$a_{n+1} \leq (1-\alpha_n) a_n + b_n + c_n, \ \forall n \geq n_0,$$

其中 n_0 是某一非负的整数, $\alpha_n \in [0,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $b_n = 0(\alpha_n)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$, 则 $a_n \to 0$ (当 $n \to \infty$).

引理 1.3[11] 设 E 是任意的实 Banach 空间, E^* 是 E 的对偶空间, $J: E \to 2^{E^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象: $J(x) = \{f \in E^* : \langle x, f \rangle = ||x|| \cdot ||f||, ||x|| = ||f||\}$, $x \in E$, 则对任意 $x, y \in E$, 有

$$||x+y||^2 \leq ||x||^2 + 2\langle y, j(x+y) \rangle, \ \forall j(x+y) \in J(x+y);$$

特别, 如果 E 是一 Hilbert 空间 H, 则 $J = I$, 故对任意的 $x, y \in H$, 有

$$||x+y||^2 \leq ||x||^2 + 2\langle y, x+y \rangle. \tag{1.2}$$

引理 1.4[9] 设 H 是一实的 Hilbert 空间, C 是 H 之一非空的闭凸子集, 则对任意的 $x \in H$ 及 $y \in C$, 有

(i) $\langle z - P_C x, P_C x - x \rangle \geq 0$, $\forall z \in C$;

(ii) $\langle z - y, y - x \rangle \geq 0$, $\forall z \in C$, 则 $y = P_C x$.

引理 1.5[12] 线性拓朴空间上的每一线性泛函是连续的, 当而且仅当它是弱连续的.

定义 1 一族由 C 到 C 的映象 $\{S(t)\}_{t \in R^+}$ 称为 C 上的非扩张映象半群, 如果其满足条件:

(1) $S(t_1 + t_2)x = S(t_1)S(t_2)x$ 对任意的 t_1, $t_2 \in R^+$ 及 $x \in C$;

(2) $S(0)x = x$ 对任意的 $x \in C$;

(3) 对任意的 $x \in C$, $t \mapsto S(t)x$ 是连续的;

(4) $||S(t)x - S(t)y|| \leq ||x-y||$ 对每一 $t \in R^+$ 及 $x, y \in C$.

引理 1.6[5] (a) 设 C 是 H 之一非空有界闭凸子集, $T: C \to C$ 是一非扩张映象. 对每一 $x \in C$, 定义 $T_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j(x)$, 则 $\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in C} ||T_n x - T(T_n x)|| = 0$.

(b) 设 C 是 H 之一非空有界闭凸子集, $S,T:C\to C$ 是二非扩张映象, 使得 $ST=TS$. 对每一 $x\in C$, 定义 $T_n(x)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i+j=k}S^iT^j(x)$, 则 $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in C}||T_nx-S(T_nx)||=0$, 而且 $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in C}||T_nx-T(T_nx)||=0$.

(c) 设 $\{S(t)\}_{t\in R^+}$ 是 C 上的一非扩张映象半群. 对每一 $x\in C$ 及 $t>0$, 令 $T_t(x)=\frac{1}{t}\int_0^t S(u)xdu$, 则对每一 $s\in\mathbf{R}^+$, $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in C}||T_t(x)-S(s)(T_t(x)||=0$.

2 主要结果

现在给出本文的主要结果.

定理 2.1 设 H 是一实的 Hilbert 空间, C 是 H 的一非空闭凸子集, $T_n:C\to C$, $n=1,2,\dots$ 是一非扩张映象的无限族, 使得 $F:=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)\neq\emptyset$. 设 $\{\lambda_n\}$ 是 $(0,1)$ 中之一序列, 满足 $\lambda_n\to 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\infty$. 对任给的 x_0, $y\in C$, 定义一序列 $\{x_n\}\subset C$ 如下

$$x_{n+1}=\lambda_{n+1}y+(1-\lambda_{n+1})T_{n+1}x_n. \tag{2.1}$$

如果存在一族由 C 到 C 的非扩张映象 $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, 其中 Γ 是一有限的或无限的指标集, 使得

(i) $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}F(G_\gamma)\neq\emptyset$ 且 $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}F(G_\gamma)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty}||T_{n+1}x_n-G_\gamma(T_{n+1}x_n)||=0$, 对每一 $\gamma\in\Gamma$,

则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $Py\in F:=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)$, 其中 P 是 H 到 F 上的投影.

证明 如所周知, 由 C 到 C 的非扩张映象的不动点的集合是闭凸的 (见文 [9]), 故由 H 到 $F:=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)$ 上的投影 P 是确定的.

定理 2.1 的证明分如下六步:

第一步 我们用归纳法证明: 对任意的 $n\geq 0$ 及对任意的 $f\in F$, $||x_n-f||\leq\max\{||x_0-f||,||y-f||\}$. 显然, 上述结果当 $n=0$ 时成立. 设上述结果对 $n\geq 0$ 成立, 现证其对 $n+1$ 也成立. 事实上, 设 $f\in F$, 于是由 T_{n+1} 的非扩张性, 有

$$\begin{aligned}||x_{n+1}-f||&=||\lambda_{n+1}y+(1-\lambda_{n+1})T_{n+1}x_n-f||\leq\lambda_{n+1}||y-f||+(1-\lambda_{n+1})||T_{n+1}x_n-f||\\&\leq\lambda_{n+1}||y-f||+(1-\lambda_{n+1})||x_n-f||\\&\leq\lambda_{n+1}||y-f||+(1-\lambda_{n+1})\max\{||x_0-f||,||y-f||\}\leq\max\{||x_0-f||,||y-f||\}.\end{aligned}$$

第二步 令 $M=||f||+\max\{||x_0-f||,||y-f||\}$, 易证, 对任意的 $n\geq 0$ 及对给定的 $f\in F$, 有 $||x_n||\leq M$; $||T_{n+1}x_n||\leq M$.

第三步 现证 $x_{n+1}-T_{n+1}x_n\to 0$. 事实上, 有 $||x_{n+1}-T_{n+1}x_n||=\lambda_{n+1}||y-T_{n+1}x_n||\leq\lambda_{n+1}(||y||+||T_{n+1}x_n||)\leq\lambda_{n+1}(||y||+M)$. 因 $\lambda_n\to 0$, 这就指出 $x_{n+1}-T_{n+1}x_n\to 0$.

第四步 现证

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x_n-Py,y-Py\rangle\leq 0. \tag{2.2}$$

事实上, 由第二步得知 $\{\langle T_{n+1}x_n-Py,y-Py\rangle\}$ 是有界的, 故上极限 $\limsup_{n\to\infty}\{\langle T_{n+1}x_n-Py,y-Py\rangle\}$ 存在. 于是存在子序列 $\{n_j\}\subset\{n\}$, 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle T_{n+1}x_n-Py,y-Py\rangle=\lim_{j\to\infty}\langle T_{n_j+1}x_{n_j}-Py,y-Py\rangle, \tag{2.3}$$

而且对某一 $q\in C$,

$$T_{n_j+1}x_{n_j}\rightharpoonup q. \tag{2.4}$$

由条件 (ii), 对每一 $G_\gamma \in \{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, 有
$$0 = \limsup_{n\to\infty} ||T_{n+1}x_n - G_\gamma(T_{n+1}x_n)|| \geq \limsup_{j\to\infty} ||T_{n_j+1}x_{n_j} - G_\gamma(T_{n_j+1}x_{n_j})||,$$
从而对每一 $G_\gamma \in \{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$,

$$\lim_{j\to\infty} ||T_{n_j+1}x_{n_j} - G_\gamma(T_{n_j+1}x_{n_j})|| = 0. \tag{2.5}$$

于是由 (2.4), (2.5) 式及引理 1.1 (半闭原理) 得知

$$q \in F(G_\gamma),\ \ \forall G_\gamma \in \{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma},\ \text{i.e,}\ q \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F(G_\gamma) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n), \tag{2.6}$$

于是由 (2.3), (2.4) 式及引理 1.5 得知

$$\limsup_{n\to\infty}\langle T_{n+1}x_n - Py, y - Py\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle T_{n_j+1}x_{n_j} - Py, y - Py\rangle = \langle q - Py, y - Py\rangle \leq 0. \tag{2.7}$$

由第三步得知: $x_{n+1} - T_{n+1}x_n \to 0$, 从而有

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x_{n+1} - Py, y - Py\rangle \leq 0. \tag{2.8}$$

第五步 令
$$\gamma_n = \max\{\langle x_{n+1} - Py, y - Py\rangle, 0\}, \tag{2.9}$$
故 $\gamma_n \geq 0,\ \forall n \geq 0$. 下证
$$\gamma_n \to 0\ \ (n \to \infty). \tag{2.10}$$

事实上, 由 (2.8) 式得知, 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 n_0, 使得 $\langle x_{n+1} - Py, y - Py\rangle < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$, 故有 $0 \leq \gamma_n < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. 由 $\epsilon > 0$ 的任意性, 得知 $\gamma_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

第六步 最后我们证明 $x_n \to Py \in \bigcap_{n=1}^\infty F(T_n)$. 事实上, 由引理 1.3 及 (2.10) 式得知, 对任意的 $n \geq n_0$, 有

$$\begin{aligned} ||x_{n+1} - Py||^2 &= ||(1-\lambda_{n+1})(T_{n+1}x_n - Py) + \lambda_{n+1}(y - Py)||^2 \\ &\leq (1-\lambda_{n+1})^2||T_{n+1}x_n - Py||^2 + 2\lambda_{n+1}\langle y - Py, x_{n+1} - Py\rangle \\ &\leq (1-\lambda_{n+1})||x_n - Py||^2 + 2\lambda_{n+1}\gamma_n. \end{aligned}$$

取 $a_n = ||x_n - Py||^2$, $\alpha_n = \lambda_{n+1}$, $b_n = 2\alpha_{n+1}\gamma_n$ 及 $c_n = 0$, 得知 $\alpha_n \in [0,1]$, $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n = \infty$ 且 $b_n = 0(\alpha_n)$, 故引理 1.2 中的所有条件被满足. 故由引理 1.2 知 $||x_n - Py|| \to 0$, 即 $x_n \to Py \in \bigcap_{n=1}^\infty F(T_n)$. 定理 2.1 证毕.

3 应用

本节将应用定理 2.1, 作为推论得出 Shimizu, Takahashi [5], O'Hara, Pillay, Xu [4] 及其他一些人的最新结果.

推论 3.1 设 C 是一实 Hilbert 空间 H 的非空有界闭凸集, 设 $\{\lambda_n\}$ 是 (0, 1) 中的序列, 满足 $\lambda_n \to 0$ 而且 $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n = \infty$. 设 $T: C \to C$ 是一非扩张映象, 且 $F(T) \neq \emptyset$. 令 $T_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j x$, $x \in C$, $n \geq 1$. 对任给的 $x_0, y \in C$ 定义一序列 $\{x_n\}$ 如下

$$x_{n+1} = \lambda_{n+1}y + (1-\lambda_{n+1})T_{n+1}x_n,\ \ \forall n \geq 0,$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $Py \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$, 其中 P 是 H 到 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ 上的投影.

证明 易知对每一 $n \geq 1$, $T_n: C \to C$ 是一非扩张映象, 而且 $F(T) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$.

事实上, 对每一 $x \in F(T)$ 及对每一 $n \geq 1$, 有 $T_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j x = x$. 因 $\{x_n\} \subset C$, 由引理 1.6 (a), 有

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in C} ||T_n x - T(T_n x)|| \geq \limsup_{n\to\infty} ||T_{n+1}x_n - T(T_{n+1}x_n)||.$$

在定理 2.1 中取 $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{T\}$ (一元集), 故推论 3.1 的结论由定理 2.1 直接可得.

推论 3.2 设 H 是一实的 Hilbert 空间, C 是 H 之一非空的有界闭凸子集, $\{\lambda_n\}$ 是 (0, 1) 中的一序列, 满足 $\lambda_n \to 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$. 设 $S, T: C \to C$ 是两个非扩张映象, 使得 $ST = TS$ 而且 $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$. 令 $T_n(x) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i+j=k} S^i T^j x$, $x \in C$, $n \geq 1$. 对任意给定的 $x_0, y \in C$, 定义一序列 $\{x_n\}$ 如下

$$x_{n+1} = \lambda_{n+1} y + (1-\lambda_{n+1}) T_{n+1} x_n, \quad \forall n \geq 0,$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $Py \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$, 其中 P 是 H 到 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ 上的投影.

证明 (1) 易知对每一 $n \geq 1$, T_n 是 C 到 C 的非扩张映象, 而且 $F(S)\cap F(T) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$.

事实上, 对每一 $x \in F(S) \cap F(T)$ 及对每一 $n \geq 1$, 有

$$T_n(x) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i+j=k} S^i T^j x = x.$$

(2) 因 $\{x_n\} \subset C$, 由引理 1.6(b), 有

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in C} ||T_n x - S(T_n x)|| \geq \limsup_{n\to\infty} ||T_{n+1}x_n - S(T_{n+1}x_n)||,$$

而且 $0 = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in C} ||T_n x - T(T_n x)|| \geq \limsup_{n\to\infty} ||T_{n+1}x_n - T(T_{n+1}x_n)||$. 在定理 2.1 中取 $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{S, T\}$ (二元集), 则推论 3.2 的结论由定理 2.1 直接可得.

推论 3.3 设 H 是一实的 Hilbert 空间, C 是 H 中之一非空闭凸子集, 而 $\{\lambda_n\}$ 是 (0, 1) 中之一序列, 满足 $\lambda_n \to 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$. 设 $\{S(t)\}_{t\in R^+}: C \to C$ 是一非扩张映象半群且 $\bigcap_{t\in R^+} F(S(t)) \neq \emptyset$. 对 $x \in C$ 及每一 $t_n > 0$, 其中 $\{t_n\}$ 是一正实数的发散序列. 令

$$T_n(x) = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} S(u)x du, \quad x \in C, \quad n \geq 1.$$

对任意给定的 $x_0, y \in C$, 定义一序列 $\{x_n\}$ 如下

$$x_{n+1} = \lambda_{n+1} y + (1-\lambda_{n+1}) T_{n+1} x_n, \quad \forall n \geq 0,$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $Py \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$, 其中 P 是 H 到 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ 上的投影.

证明 (1) 易知, 对每一 $n \geq 1$, T_n 是 C 到 C 的非扩张映象. 事实上, 有

$$\begin{aligned} ||T_n x - T_n y|| &= \left\| \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} (S(u)x - S(u)y) du \right\| \leq \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} ||S(u)x - S(u)y|| du \\ &\leq \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} ||x - y|| du = ||x - y||, \quad \forall x, y \in C. \end{aligned}$$

(2) 易知 $\bigcap_{s\in R^+} F(S(s)) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$. 事实上, 对每一 $x \in \bigcap_{s\in R^+} F(S(s))$, 有 $S(s)x=x$, $\forall s \in R^+$, 从而对每一 $n \geq 1$, 有

$$T_n(x) = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} S(u)x du = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} x du = x.$$

(3) 因 $\{x_n\} \subset C$, 由引理 1.6 (c), 对每一 $s \in R^+$, 有

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in C} \|T_n x - S(s)(T_n x)\| \geq \limsup_{n\to\infty} \|T_{n+1}x_n - S(s)(T_{n+1}x_n)\|.$$

在定理 2.1 取 $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{S(s)\}_{s\in R^+}$, 于是推论 3.3 的结论由定理 2.1 直接可得.

推论 3.4 设 $T_1, T_2, \ldots, T_N$ 是 N 个由 C 到 C 的非扩张映象, 满足条件 $T_iT_j = T_jT_i$, $\forall i$, $j = 1, 2, \ldots N$, $i \neq j$ 且 $F := \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$. 设 $\{\lambda_n\}$ 是 (0, 1) 中之一序列, 满足条件: $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$ 且 $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n = \infty$. 对任意给定的 $x_0, y \in C$, 定义一序列 $\{x_n\} \subset C$ 如下 $x_{n+1} = \lambda_{n+1}y + (1 - \lambda_{n+1})T_{n+1}x_n$, $\forall n \geq 0$, 其中 $T_n = T_{n(\mathrm{mod}\, N)}$. 如果对每一 $i = 1, 2, \ldots, N$,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0, \tag{3.1}$$

则 $x_n \to Py$, 其中 P 是由 H 到 $F := \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$ 上的投影.

证明 由 (3.1) 式得知, 对每一 $i = 1, 2, \ldots, N$,

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} \|T_{n+1}x_n - T_iT_{n+1}x_n\| \\ &\quad = \limsup_{n\to\infty} \|T_{n+1}x_n - T_{n+1}T_ix_n\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - T_ix_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - T_ix_n\| = 0.\end{aligned}$$

在定理 2.1 中取 $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$, 则推论 3.4 的结论由定理 2.1 直接可得.

推论 3.4 证毕.

注 1 (1) 推论 3.4 是 O'Hara, Pillay, Xu [4] 中的定理 3.3. 现在这一定理作为本文定理 2.1 的推论而得出.

(2) 定理 2.1 也推广和改进了文 [2, 3, 6, 8] 中的相应的结果.

参考文献

[1] Bauschke H., The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 1996, **202**: 150–159.

[2] Halpern B., Fixed points of nonexpansive maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, **73**: 957–961.

[3] Lions P., Approximation de points fixes de contractions, *C. R. Acad Sci. Paris Ser. A-B*, 1977, **284**: 1357–1359.

[4] O'Hara J. G., O'Hara Pillay P. and Xu H. K., Iterative approaches to finding nearest common fixed points of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, *Nonlinear Anal. TMA*, 2003, **54**: 1417–1426.

[5] Shimizu T. and Takahashi W., Paper Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, **211**: 71–83.

[6] Wittmann R., Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, *Jour Arch Math.*, 1992, **58**: 486–491.

[7] Xu H. K., An iterative approach to quadratic optimization, *J. Optim. Theory Appl.*, 2003, **116**(3): 659–678.

[8] Zhou Y. Y. and Chang S. S., On the convergence of implicit iterative process for finite family of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, 2002, **23**: 911–921.

[9] Goebel K. and Kirk W. A., Topics in metric fixed point theory, Cambridge Studies in Advancod Mathematics, 1990.

[10] Liu L. S., Ishikawa and Mann iterarive processes with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach space, *J. Math. Anal. Appl.*, 1995, **194**: 114–125.

[11] Chang S. S., On Chidume's open questions and approximation solutions of multivalued strongly accretive mappings equations in Banach spaces, *J. Math. Ana. Appl.*, 1997, **216**: 94–111.

[12] Giles J. R., Convex analysis with applications in differentiation of convex functions, Research Notes in Mathematics 58, Boston, London: Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[13] Reich S., Approximating fixed points of nonexpansive mappings, *Pan American Math. J.*, 1994, **4**(2): 23–28.