

# 基于六面体覆盖的三维数值流形方法的 理论探讨与应用

郑榕明<sup>1</sup> 张勇慧<sup>1,2</sup>

(<sup>1</sup>香港理工大学土木与结构工程系 香港) (<sup>2</sup>中国科学院武汉岩土力学研究所 武汉 430071)

**摘要** 介绍了基于六面体单元的三维数值流形方法的基本理论,并在六面体单元中采用了有限元中 C8 型等参单元的形函数作为流形元中的覆盖函数。推导了相应平衡方程的刚度、初始应力、点荷载、体荷载、惯性力、固定点、法向接触、切向接触和摩擦力子矩阵。在二维接触中,切向应力和摩擦力的方向很容易沿着接触边得到,但在三维问题中要在接触面上确定该方向则非常困难,这也是所有计算方法在遇到三维接触时的难题。引入了向量理论和迭代方法,避开了相应困难的干扰。最后,给出了一个简单的地下失稳算例,证明了该三维方法的正确性。

**关键词** 岩石力学, 三维数值流形方法, 六面体, 覆盖函数, 三维接触

**分类号** TU 458.4

**文献标识码** A

**文章编号** 1000-6915(2004)10-1745-10

## APPLICATION AND DISCUSSION OF THREE DIMENSIONAL NUMERICAL MANIFOLD METHOD BASED ON HEXAHEDRON ELEMENT

Cheng Rongming<sup>1</sup>, Zhang Yonghui<sup>1,2</sup>

(<sup>1</sup>Department of Civil and Structural Engineering, Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China)

(<sup>2</sup>Institute of Rock and Soil Mechanics, CAS, Wuhan 430071 China)

**Abstract** In this paper, three-dimensional numerical manifold method (NMM) based on hexahedron element is proposed and the shape functions of C8 isoparametric element are used as the cover weight functions. All sub-matrices of equilibrium equations are derived according to this cover weight function. In 2D contact, the direction of shear stiffness and friction force is easily defined along the contact edge. For the corresponding 3D contact problem, it is difficult to determine similar relations in simple way. In the present paper, vector theory and iterative method are proposed to overcome this kind of difficulty. An example of underground excavation is also presented.

**Key words** rock mechanics, three dimensional numerical manifold method, hexahedron element, cover weight function, three dimensional contact

## 1 前 言

数值流形方法是利用现代数学概念——“流形”的有限覆盖技术建立起来的统一解决连续与非连续

变形问题的数值方法,该方法采用连续和非连续的覆盖函数,将有限元、不连续变形分析(DDA)和解析方法统一到一种计算方法中,它最早由石根华博士在 1991 年提出并率先应用在块体与节理岩体的变形模拟中<sup>[1-3]</sup>。经过近 10 a 的发展,在国内外学

2003 年 10 月 26 日收到初稿,2004 年 1 月 16 日收到修改稿。

作者 郑榕明 简介:男,1959 年生,博士,现任副教授,主要从事岩土力学方面的教学与科研工作。E-mail: ceymchen@polyu.edu.hk。

者的共同努力下，二维数值流形方法已经拥有一套比较完善的理论，而且，应用方面的探讨也日渐多起来<sup>[4, 5]</sup>。作者曾经对 DDA 方法作了大量的研究工作<sup>[6-9]</sup>，在此基础上发展了二维流形元程序，并应用在地下洞室开挖的模拟中<sup>[10]</sup>，另外，还曾探讨过 Wilson 等参单元法在数值流形方法中的作用<sup>[11]</sup>。

实际的岩土工程问题都是三维问题，任何计算方法最终都应该发展成三维并服务于工程实际，所以发展三维的流形元理论是非常重要和迫切的。Cundall 发展了三维的离散单元法<sup>[12]</sup>，国内部分学者也发展了三维的离散元和 DDA 方法<sup>[13, 14]</sup>，作者也曾探讨过三维的接触问题<sup>[15]</sup>，但三维的流形元方法尚未见到。本文提出了基于六面体单元的三维数值流形方法的基本理论，采用了有限元中 C8 型等参单元的形函数作为流形元中的覆盖函数，并推导了相应的方程。

## 2 数值流形方法的基本原理

拓扑流形和微分流形，简单地讲，就是把许多个别重叠的区域连接在一起去覆盖全部的材料体。因此，总体形状可用局部覆盖所定义的函数来计算。

数值流形方法采用数学覆盖和物理覆盖 2 套覆盖系统来定义计算区域：由数学覆盖来定义近似求解精度，其可由用户自行选择，如规则的格子、有限元的网格或级数的收敛域，都可以转化为有限数学覆盖；物理覆盖系统是由数学覆盖和物理网格共同形成，物理网格由材料本身决定，定义其积分区域，包括材料体的边界、裂隙、块体和不同材料区域的交界面等。如果物理网格将一个数学覆盖分成 2 个或更多的完全不连续的区域，则这些区域定义为物理覆盖。所以说，物理网格将数学覆盖细分成物理覆盖系统。

如图(1)所示，分析 1 个包含 1 条不贯穿的裂隙的多边形块体，采用三角形的数学覆盖网格将分析区域全部覆盖，共有 6 个数学覆盖 V1, V2, V3, V4, V5, V6，每个数学覆盖由含有该节点的所有三角形单元形成。例如，节点 1 的数学覆盖由单元 123 组成，节点 2 的数学覆盖由单元 123, 253, 245 共同组成。物理网格(图 1 中的粗线条)将数学覆盖 V1 分成一个物理覆盖  $1_1$ ，将数学覆盖 V2 分成 2 个物理覆盖  $2_1$  和  $2_2$ ， $2_1$  和  $2_2$  可有不同的材料性质，沿交界边(即图中裂隙)可以有不连续的力学行为，

可以拉伸、扭曲甚至完全裂开。也就是说，原始的有限单元 245 被裂隙分割成 2 个流形单元  $2_14_25_1$  和  $2_24_15_1$ ，它们在接触边上的节点是不同的，在接触处可以有不连续的位移，这是与有限元分析的最大的不同，也是该方法的优势所在。而在边 23 上，两边的物理覆盖都是相同的，如物理覆盖  $2_1$  和  $2_1$ ，物理覆盖  $3_1$  和  $3_1$ 。这表明沿着边 23，两边的材料体是相同的，所有的力学行为是连续的，这又比不连续变形分析(DDA)方法中采用的所有的边都是不连续的假设要更符合材料本身的状况。可以这么说，数值流形方法是利用覆盖技术将有限元、DDA 和解析方法统一到内部的新的数值方法，而有限元和 DDA 只是数值流形方法的 2 种特殊情况。

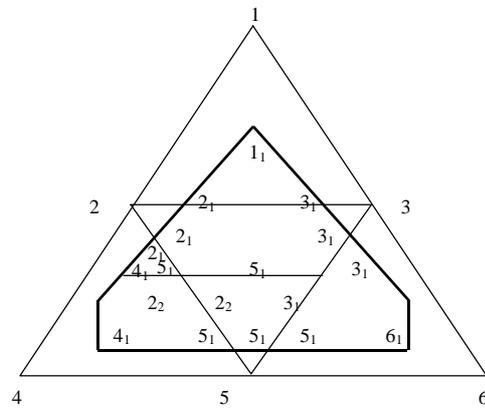


图 1 有限覆盖系统中流形单元的节点编号

Fig.1 Node numbering in manifold cover system

## 3 权函数和位移函数

在数值流形方法中，流形单元是由  $m$  个物理覆盖的公共部分组成，整体位移函数由这些覆盖的位移函数取加权平均得到，如何确定权函数是非常重要的。假定单元  $E$  是  $m$  个互相交迭的覆盖  $(C_i, i = 1, 2, \dots, m)$  的公共部分，那么该单元的位移函数  $u(x, y), v(x, y)$ ，可表示为

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^m w_i(x, y)u_i(x, y) \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^m w_i(x, y)v_i(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中： $w_i(x, y)$  为覆盖  $i$  的权函数，它必须满足下列条件：

$$\left. \begin{aligned} 0 & \leq w_i(x, y) \leq 1 \quad (x, y) \in C_i \\ w_i(x, y) &= 0 \quad (x, y) \notin C_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m w_i(x, y) \equiv 1 \quad (x, y) \in E \quad (3)$$

式(1)可以写成级数的形式：

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} w_i(x, y)f_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & w_i(x, y)f_{ij}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i, 2j-1} \\ d_{i, 2j} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式中： $d_{ij}$ 为待求的未知系数， $f_{ij}$ 为覆盖上的基本函数，它的形式是 $x^k y^l$ 。因为整个计算区域 $F$ 是由这些单元不重叠而组成，所以，整体位移函数 $f(x, y)$ 很容易由各单元的位移函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 表达出来。

理论上，流形方法中可使用任意形状的数学覆盖，但是由于权函数、公共域和积分都与数学覆盖的形状息息相关，所以，合理地选择覆盖形状显得至关重要。实践证明，采用三角形有限元网格或四边形有限元网格作为数学覆盖网格将为计算带来巨大的方便。

假定三角形 $E$ 是3个覆盖 $i, j, k$ 的公共部分，在有限元中三角形 $ijk$ 的形函数可表示为

$$\begin{pmatrix} N_i(x, y) \\ N_j(x, y) \\ N_k(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} x_j y_k - x_k y_j & y_j - y_k & x_k - x_j \\ x_k y_i - x_i y_k & y_k - y_i & x_i - x_k \\ x_i y_j - x_j y_i & y_i - y_j & x_j - x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (5)$$

式中： $\Delta = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)$ 。如果取 $w_i(x, y) = N_i(x, y)$ ，很容易证明 $w_i(x, y)$ 满足式(2)，(3)，所以，可取三角形有限元的形函数作为3个覆盖的流形单元的权函数。

在四边形覆盖中，等参单元的形函数表示为

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \mathbf{x}_0)(1 + \mathbf{h}_0) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (6)$$

式中： $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_i \mathbf{x}$ ， $\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}_i \mathbf{h}$ 。

很容易证明 $\sum_{i=1}^4 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = 1, 0 \leq N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \leq 1$ ,

同样地，可以取 $w_i(x, y) = N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ 作为4个覆盖流形单元的权函数。在有弯曲的问题中，为提高计算精度，也可取Wilson等参单元作数学覆盖，详见文[9]。

### 4 基于六面体覆盖的三维数值流形方法

在三维问题中最常见的是四面体单元和六面体

单元，限于篇幅，本文仅讨论六面体单元。

#### 4.1 权函数与位移函数

如图2所示，在 $(x, y, z)$ 坐标系中的一个典型的不规则的六面体单元可以从 $(\mathbf{x}, \mathbf{h}, z)$ 坐标系的规则的立方体映射过来，C8型等参单元的形函数可以表示为

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \mathbf{x}\mathbf{x}_i)(1 + \mathbf{h}\mathbf{h}_i)(1 + \mathbf{z}\mathbf{z}_i) \quad (7)$$

很容易证明

$$\sum_{i=1}^8 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}, z) = 1 \quad (8)$$

$$\left. \begin{matrix} N_i = 1 & (p = i) \\ 0 & N_i = 1 & (p = 1, 2, 3, \dots, 8) \end{matrix} \right\} \quad (9)$$

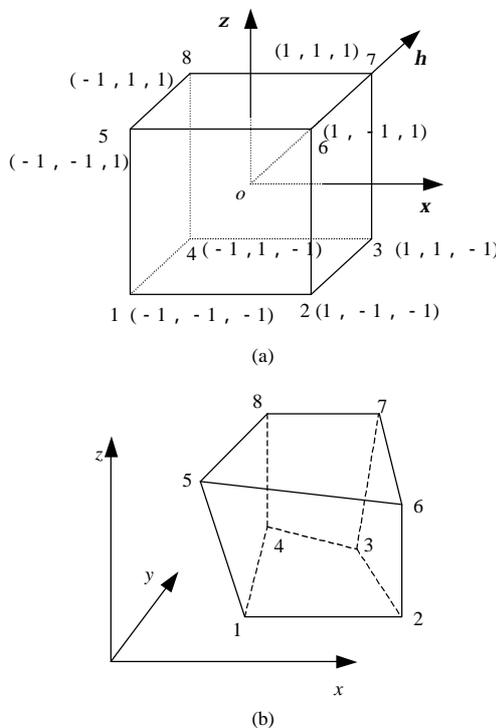


图2 从坐标系 $(\mathbf{x}, \mathbf{h}, z)$ 到坐标系 $(x, y, z)$ 的一一映射  
Fig.2 Mapping between local and global coordinate systems

所以，可设 $N_i$ 为形函数。在二维NMM中形函数的符号通常是 $W$ ，在三维NMM中由于 $W$ 代表 $z$ 方向的位移，本文使用 $N$ 代替 $W$ 来表示形函数。单元内任意一点 $P(x, y, z)$ 的位移可表示为

$$\left. \begin{matrix} u(x, y, z) = \sum_{i=1}^8 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}, z) u_i \\ v(x, y, z) = \sum_{i=1}^8 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}, z) v_i \\ w(x, y, z) = \sum_{i=1}^8 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}, z) w_i \end{matrix} \right\} \quad (10)$$

可以重写成

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \{T\}[D] = ([T_{e(1)}][T_{e(2)}] \cdots [T_{e(8)}]) \begin{Bmatrix} [D_{e(1)}] \\ [D_{e(2)}] \\ \vdots \\ [D_{e(8)}] \end{Bmatrix} \quad (11)$$

其中，

$$[T_{e(i)}] = \begin{bmatrix} N_{e(i)} & 0 & 0 \\ 0 & N_{e(i)} & 0 \\ 0 & 0 & N_{e(i)} \end{bmatrix}, \quad \{D_{e(i)}\} = \begin{Bmatrix} u_{e(i)} \\ v_{e(i)} \\ w_{e(i)} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$N_{e(i)} = \frac{1}{8}(1 + \mathbf{x}\mathbf{x}_i)(1 + \mathbf{h}\mathbf{h}_i)(1 + \mathbf{z}\mathbf{z}_i) \quad (13)$$

而  $(x, h, z)$  是对应整体坐标  $(x, y, z)$  的局部坐标，可用迭代法来求得。

从等参坐标到整体坐标的一一对应关系很容易给出：

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{z})x_i \\ y &= \sum_{i=1}^8 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{z})y_i \\ z &= \sum_{i=1}^8 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{z})z_i \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

从式(14)很容易计算对应任意点  $(x, h, z)$  的  $(x, y, z)$ ，但相反的却很难用  $(x, y, z)$  来表达  $(x, h, z)$ ，事实上，此处需要用到迭代的方法。设  $J$  是三维 Jacobi 矩阵，可得向量的表达式：

$$\vec{dx} = J d\mathbf{x}, \quad d\mathbf{x} = J^{-1} \vec{dx} \quad (15)$$

令

$$\vec{x}_0 = (x_0, h_0, z_0) = 0, \quad \vec{x} = (x, h, z), \quad \vec{x} = (x, y, z)$$

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad d\mathbf{x} = (dx, dh, dz)$$

$$d\mathbf{x} = (dx, dy, dz)$$

步骤 I：将  $\vec{x}_0$  一步一步代入下面的等式，可得新的  $\vec{x}$  值为

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}_0 &= \sum_{i=1}^8 N_i(\vec{x}_0)x_i \\ d\mathbf{x} &= \vec{x} - \vec{x}_0 \\ d\mathbf{x} &= J^{-1} \vec{dx} \\ \vec{x} &= \vec{x}_0 + d\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

步骤 II：如果  $|\vec{x} - \vec{x}_0|$  大于一个预设的小值(例如：0.000 1)，令  $\vec{x}_0 = \vec{x}$  并返回步骤 I，重复刚才的迭代过程；如果不是，停止迭代，此时所得的  $\vec{x}$  对

应  $\vec{x}$ 。

### 4.2 平衡方程的子矩阵

三维 NMM 的平衡方程可以看作是二维的扩展，从式(10)可以得到单元的应变为

$$\{\mathbf{e}_e\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \\ \mathbf{g}_{xy} \\ \mathbf{g}_{yz} \\ \mathbf{g}_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = [B_e]\{D_e\} \quad (17)$$

其中，

$$[B_e] = ([B_{e(1)}][B_{e(2)}] \cdots [B_{e(8)}])$$

$$[D_e] = \{[D_{e(1)}][D_{e(2)}] \cdots [D_{e(8)}]\}^T$$

$$[B_{e(i)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{h}} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{z}} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

应力-应变的关系  $\{\mathbf{s}\} = [E]\{\mathbf{e}\}$  可满足：

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{s}_z \\ \mathbf{t}_{xy} \\ \mathbf{t}_{yz} \\ \mathbf{t}_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+m)(1-2m)} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} m & 1-m & m & 0 & 0 & 0 \\ m & m & 1-m & 0 & 0 & 0 \\ 1-m & m & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2m}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ g_{xy} \\ g_{yz} \\ g_{zx} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

下面给出平衡方程各子矩阵的结果。

4.2.1 刚度矩阵

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{e(r)}]^T [E] [B_{e(s)}] |J| dx dy dz \rightarrow [K_{e(r)e(s)}] \quad r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (20)$$

4.2.2 初始应力矩阵

$$-\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{e(r)}]^T [J] dx dy dz \{s_e^0\} \rightarrow \{F_{e(r)}\} \quad r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (21)$$

4.2.3 点荷载子矩阵

荷载  $F(F_x, F_y, F_z)$  作用在点  $(X_0, Y_0, Z_0)$  上：

$$[T_{e(r)}(x_0, y_0, z_0)]^T \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_{e(r)}\} \quad r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (22)$$

4.2.4 体积力子矩阵

$$\begin{bmatrix} V_{e(r)} & 0 & 0 \\ 0 & V_{e(r)} & 0 \\ 0 & 0 & V_{e(r)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_{e(r)}\} \quad r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (23)$$

其中，

$$V_{e(i)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{e(i)} |J| dx dy dz \quad (24)$$

4.2.5 惯性力子矩阵

$$\frac{2r}{\bar{A}^2} \begin{bmatrix} t_{e(r)e(s)} & 0 & 0 \\ 0 & t_{e(r)e(s)} & 0 \\ 0 & 0 & t_{e(r)e(s)} \end{bmatrix} \rightarrow [K_{e(r)e(s)}] \quad r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (25)$$

$$\frac{2r}{\bar{A}} \begin{bmatrix} t_{e(r)e(s)} & 0 & 0 \\ 0 & t_{e(r)e(s)} & 0 \\ 0 & 0 & t_{e(r)e(s)} \end{bmatrix} \{V_{e(s)}(0)\} \rightarrow \{F_{e(r)}\}$$

$$r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (26)$$

其中，

$$\{V_{e(s)}(0)\} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} u_{e(s)}(0) \\ v_{e(s)}(0) \\ w_{e(s)}(0) \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$$t_{e(r)e(s)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_{e(r)} N_{e(s)} |J| dx dy dz \quad (28)$$

4.2.6 固定点子矩阵

$$p N_{e(r)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{z}_0) N_{e(s)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{z}_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow [K_{e(r)e(s)}] \quad r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (29)$$

4.3 三维接触问题

三维接触分析要比二维复杂得多。三维的接触最基本的是点-面接触，其他的点-线，线-面，面-面都可以转化为这种形式。三维接触最大的问题在于不能预先确定点在接触面上的运动方向，从而给切向位移和摩擦位移的计算及其势能的偏微分运算带来困难，本文提出了 1 个简单而有效的矢量运算和迭代方法。

如图 3 所示，接触面有 4 个角点： $P_2, P_3, P_4, P_5$ ，而事实上，3 点决定 1 个平面，所以，可以取其中任意 3 个作为该平面的参数，例如： $P_2, P_3, P_4$ 。如图 4 所示，假定  $P_1$  是单元  $i$  的角点， $P_2, P_3, P_4$  是单元  $j$  的接触面， $(x_k, y_k, z_k)$  和  $(u_k, v_k, w_k)$  分别是角点  $P_k (k = 1, 2, 3, 4)$  的坐标和位移，从点  $P_1$  到面  $P_2, P_3, P_4$  的法向距离为

$$d_n = \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (30)$$

式中： $S$  为三角形  $P_2 P_3 P_4$  的面积，且

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \quad (31)$$

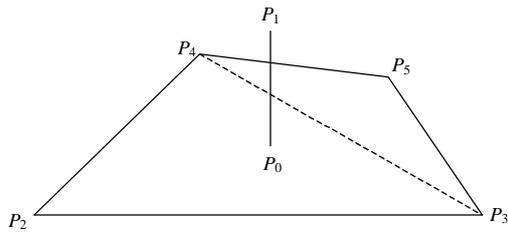


图3 点  $P_1$  和面  $P_2P_3P_4$  的接触关系

Fig.3 Connect relation between point  $P_1$  and face  $P_2P_3P_4$

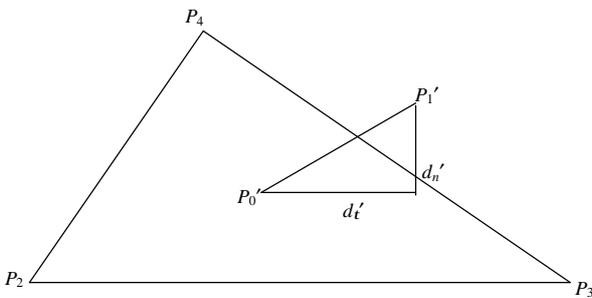


图4 法向位移和切向位移

Fig.4 Normal and tangential displacements along contact surface

在发生位移  $(u_k, v_k, w_k)$  后，法向距离为

$$d'_n = \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} 1 & x_1 + u_1 & y_1 + v_1 & z_1 + w_1 \\ 1 & x_2 + u_2 & y_2 + v_2 & z_2 + w_2 \\ 1 & x_3 + u_3 & y_3 + v_3 & z_3 + w_3 \\ 1 & x_4 + u_4 & y_4 + v_4 & z_4 + w_4 \end{vmatrix} \quad (32)$$

如果  $d'_n < 0$ ，发生  $P_1$  侵入面  $P_2P_3P_4$  的情况。

#### 4.3.1 法向接触子矩阵

当时步较小时，可以忽略式(32)的 2 阶无穷小量：

$$d'_n \approx d_n + \frac{1}{2S} (L_{11} \ L_{12} \ L_{13}) \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2S} (L_{21} \ L_{22} \ L_{23}) \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2S} (L_{31} \ L_{32} \ L_{33}) \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2S} (L_{41} \ L_{42} \ L_{43}) \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

$L_{ij}$  可以用已知的点坐标  $(x_k, y_k, z_k)$  来表示。

令

$$\{H\} = \frac{1}{2S} [T_i(x_i, h_i, z_i)]^T \begin{Bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \\ L_{13} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

$$\{G\} = \frac{1}{2S} [T_j(x_j, h_j, z_j)]^T \begin{Bmatrix} L_{21} \\ L_{22} \\ L_{23} \end{Bmatrix} +$$

$$\frac{1}{2S} [T_j(x_j, h_j, z_j)]^T \begin{Bmatrix} L_{31} \\ L_{32} \\ L_{33} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2S} [T_j(x_j, h_j, z_j)]^T \cdot$$

$$\begin{Bmatrix} L_{41} \\ L_{42} \\ L_{43} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

可得

$$d'_n = d_n + \{H\}^T \{D_i\} + \{G\}^T \{D_j\} \quad (36)$$

法向弹簧的势能  $D_s$  为

$$D_s = \frac{1}{2} p d_n'^2 = \frac{p}{2} (d_n + \{H\}^T \{D_i\} + \{G\}^T \{D_j\})^2 \quad (37)$$

经偏导后，可得

$$p \{H_{i(r)}\} \{H_{i(s)}\}^T \rightarrow [K_{i(r)i(s)}] \quad (38)$$

$r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$p \{H_{i(r)}\} \{G_{j(s)}\}^T \rightarrow [K_{i(r)j(s)}] \quad (39)$$

$r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$p \{G_{j(r)}\} \{H_{i(s)}\}^T \rightarrow [K_{j(r)i(s)}] \quad (40)$$

$r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$p \{G_{j(r)}\} \{G_{j(s)}\}^T \rightarrow [K_{j(r)j(s)}] \quad (41)$$

$r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$-p d_n \{H_{i(r)}\} \rightarrow [F_{i(r)}] \quad (42)$$

$r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$$-p d_n \{G_{j(r)}\} \rightarrow [F_{j(r)}] \quad (43)$$

$r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

#### 4.3.2 切向接触子矩阵

二维问题角-边接触中，切相位移的方向就是沿着接触边，而三维角-面接触中切相位移的方向只在接触面上而不知具体的方向，所以有关切向位移的计算是非常不同的。本文将引入向量的计算方法，如图4所示，假设  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  在面  $P_2P_3P_4$  上

并且是角点  $P_1$  的接触点, 一个时步后,  $P_0$  和  $P_1$  移动到  $P_0'$  和  $P_1'$ , 从  $P_1'$  到  $P_2P_3P_4$  的法向位移是  $d_n'$ , 点  $P_1$  在面  $P_2P_3P_4$  上相对的剪切位移是  $d_\tau'$ , 即

$$d_\tau'^2 = \left( \frac{P_0'P_1'}{P_0P_1} \right)^2 - d_n'^2 = (x_1 + u_1 - x_0 - u_0)^2 + (y_1 + v_1 - y_0 - v_0)^2 + (z_1 + w_1 - z_0 - w_0)^2 - d_n'^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 + 2(x_1 - x_0)(u_1 - u_0) + 2(y_1 - y_0)(v_1 - v_0) + 2(z_1 - z_0)(w_1 - w_0) + (u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 + (w_1 - w_0)^2 - d_n'^2 \quad (44)$$

略去二阶和高阶项, 有

$$d_\tau'^2 \approx S_1 + 2 \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} - d_n'^2 = S_1 + 2\{D_i\}^T \{H\} + 2\{D_j\}^T \{G\} - (\{H\}^T \{D_i\} + \{G\}^T \{D_j\} + d_n)^2 \quad (45)$$

其中,

$$S_1 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 \quad (46)$$

$$\{H\} = [T_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{z}_1)]^T \begin{Bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

$$\{G\} = -[T_j(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{z}_0)]^T \begin{Bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

而  $\{H\}$ ,  $\{G\}$  和式(34), (35)相同。

法向弹簧势能可写成

$$D_s = \frac{1}{2} p d_\tau'^2 = \frac{p}{2} (S_1 + 2\{D_i\}^T \{H\} + 2\{D_j\}^T \{G\}) - \frac{p}{2} (d_n + \{H\}^T \{D_i\} + \{G\}^T \{D_j\})^2 \quad (49)$$

经过偏导可得

$$-p\{H_{i(r)}\}\{H_{i(s)}\}^T \rightarrow [K_{j(r)i(s)}] \quad r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (50)$$

$$-p\{H_{i(r)}\}\{G_{j(s)}\}^T \rightarrow [K_{i(r)j(s)}] \quad r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (51)$$

$$-p\{G_{j(r)}\}\{H_{i(s)}\}^T \rightarrow [K_{j(r)i(s)}] \quad r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (52)$$

$$-p\{G_{j(r)}\}\{G_{j(s)}\}^T \rightarrow [K_{j(r)j(s)}] \quad r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (53)$$

$$pd_n\{H_{i(r)}\} - p\{H_{i(r)}\}' \rightarrow [F_{i(r)}] \quad r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (54)$$

$$pd_n\{G_{j(r)}\} - p\{G_{j(r)}\}' \rightarrow [F_{j(r)}] \quad r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (55)$$

### 4.3.3 摩擦力子矩阵

接触面的应力-应变关系是按库仑定律决定的: 当  $F < N \tan(\mathbf{f}) + C$  时, 采用法向和切向弹簧; 当  $F \geq N \tan(\mathbf{f}) + C$  时, 采用法向弹簧和摩擦力。其中,  $N$  是法向力,  $\mathbf{f}$  和  $C$  分别是摩擦角和粘聚力。

如图 5 所示, 假定  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  移动到  $P_1'(x_1 + u, y_1 + v, z_1 + w)$ , 其中  $\vec{n}$  是面  $P_2P_3P_4$  的单位法向矢量。

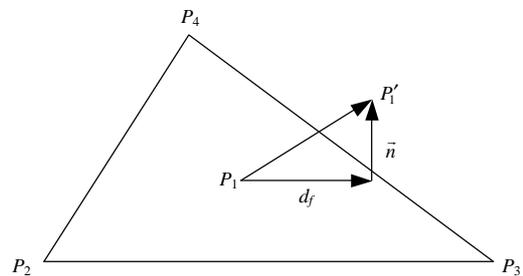


图 5 摩擦力的方向和摩擦位移

Fig.5 Direction and displacement of frictional force

从点  $P_1$  到  $P_1'$  的在面  $P_2P_3P_4$  的切向矢量为  $\overrightarrow{P_1P_1'} - (\overrightarrow{P_1P_1'} \cdot \vec{n})\vec{n}$  面  $P_2P_3P_4$  的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (56)$$

可表示为

$$ax + by + cz = d \quad (57)$$

式中:  $a, b, c, d$  可用已知数  $(x_k, y_k, z_k)$  表示出来, 很容易得到单位法向矢量  $\vec{n}$  及切向矢量  $\overrightarrow{P_1P_1}'$ :

$$\vec{n} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\vec{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\vec{j} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\vec{k} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k} \quad (58)$$

$$\vec{P}_1\vec{P}'_1 = u_1\vec{i} + v_1\vec{j} + w_1\vec{k} \quad (59)$$

$$\vec{P}_1\vec{P}'_1 - (\vec{P}_1\vec{P}'_1 \cdot \vec{n})\vec{n} = (u_1 - a_1^2u_1 - a_1b_1v_1 - a_1c_1w_1)\vec{i} + (v_1 - a_1b_1u_1 - b_1^2v_1 - b_1c_1w_1)\vec{j} +$$

$$(w_1 - a_1c_1u_1 - b_1c_1v_1 - c_1^2w_1)\vec{k} = \begin{Bmatrix} 1-a_1^2 \\ -a_1b_1 \\ -a_1c_1 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} \vec{i} +$$

$$\begin{Bmatrix} -a_1b_1 \\ 1-b_1^2 \\ -b_1c_1 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} \vec{j} + \begin{Bmatrix} -a_1c_1 \\ -b_1c_1 \\ 1-c_1^2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} \vec{k} \quad (60)$$

然后，可得滑动位移  $d_f$  和相应的势能  $p_f$

$$d_f = \left| \vec{P}_1\vec{P}'_1 - (\vec{P}_1\vec{P}'_1 \cdot \vec{n})\vec{n} \right| = \sqrt{(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - (a_1u_1 + b_1v_1 + c_1w_1)^2} \quad (61)$$

$$p_f = Fd_f \quad (62)$$

二维问题中，摩擦力的方向可以确定，所以势能  $p_f$  可以用  $\{D_i\}$  来表示， $\frac{\partial p_f}{\partial \{D_i\}}$  可以直接求出，见文[2]。三维问题无法预先确定摩擦力的方向，因此  $p_f$  包含了未知数  $u_1, v_1, w_1$  的根号项，此处势能的微分  $\frac{\partial p_f}{\partial \{D_i\}}$  很难求出。本文采用迭代的方法，假定  $d_x, d_y, d_z$  是对应  $d_f$  在  $x, y, z$  方向上的分量，那么，

$$d_f = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} \quad (63)$$

设初始摩擦力为 0，求解整体平衡方程可得  $(u_1, v_1, w_1)$ ，其后的迭代过程如下：

步骤 I：将  $(u_1, v_1, w_1)$  代入有关公式，可得摩擦位移向量为

$$\vec{P}_1\vec{P}'_1 - (\vec{P}_1\vec{P}'_1 \cdot \vec{n})\vec{n} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k} \quad (64)$$

和摩擦力的方向  $\frac{1}{d_f}(d_x \ d_y \ d_z)$  及单元  $e$  的  $P_1$  点的摩擦力势能为

$$p_f = Fd'_f = \frac{F}{d_f}(u_1 \ v_1 \ w_1) \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} =$$

$$\frac{F}{d_f}\{D_i\}^T [T_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{z}_1)]^T \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} = F\{D_i\}^T \{H\} \quad (65)$$

其中，

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} H_{i(1)} \\ H_{i(2)} \\ \vdots \\ H_{i(8)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{d_f} [T_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{z}_1)]^T \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} \quad (66)$$

因此，

$$-F\{H_{i(r)}\} \rightarrow \{F_{i(r)}\} \quad r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (67)$$

同样地，对于单元  $j$  的  $P_0$  点，有

$$F\{G_{j(r)}\} \rightarrow \{F_{j(r)}\} \quad r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \quad (68)$$

其中，

$$\{G\} = \begin{Bmatrix} G_{j(1)} \\ G_{j(2)} \\ \vdots \\ G_{j(8)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{d_f} [T_j(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{z}_0)]^T \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} \quad (69)$$

步骤 II：求解代入式(67)，(68)的整体平衡方程可得新的位移  $(u'_1, v'_1, w'_1)$ ，检查下列等式：

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{u'_1 - u_1}{u_1} \right| \times 100\% < 1\% \\ \left| \frac{v'_1 - v_1}{v_1} \right| \times 100\% < 1\% \\ \left| \frac{w'_1 - w_1}{w_1} \right| \times 100\% < 1\% \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

如果上式不满足，返回步骤 I，令  $(u_1, v_1, w_1) = (u'_1, v'_1, w'_1)$  开始新的循环；否则停止循环。

## 5 算例分析

此处模拟一个煤矿长壁工作面覆岩失稳的过程。取计算模型尺寸为 150 m×60 m×60 m，煤层厚度为 5 m，倾角为 0。图 6(a)是由节理切割而成的物理网格，图 6(b)是用规则的正方体单元作为数学覆盖网格，流形单元则是由这 2 种网格重叠在一起所形成。其中，数学覆盖用来定义近似解的精度，而

物理网格作为实际的材料边界，定义其积分区域。取煤层材料常数为： $E = 8 \times 10^9 \text{ Pa}$ ， $\nu = 0.24$ ， $\rho = 1.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ；岩层材料常数为  $E = 12 \times 10^9 \text{ Pa}$ ， $\nu = 0.34$ ， $\rho = 2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。计算参数  $\Delta t = 0.03 \text{ s}$ ， $k_n = 3 \times 10^{10} \text{ Pa/m}$ ， $k_s = 1 \times 10^{10} \text{ Pa/m}$ 。荷载只取块体自重，并设摩擦角和粘聚力均为 0。底部边界取固定，上部为自由边界，左右取水平方向固定。先计算整个模型在重力作用下的应力分布，再删除块体模拟煤层开挖过程。

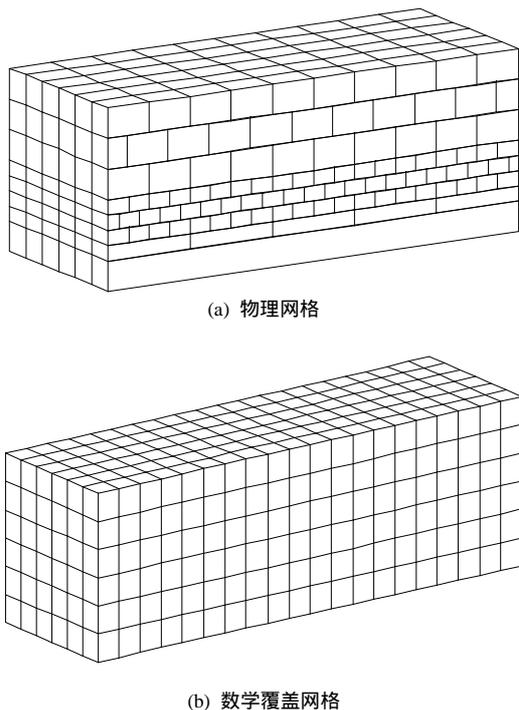


图 6 计算模型

Fig.6 Physical and mathematical covers for numerical problem

图 7(a), (b)分别是开挖后计算 50 个时步的三维图和剖面图，图 8(a), (b)分别是开挖后计算 100 个时步的三维图和剖面图。从图中不难看出，直接顶随着煤层的开采而冒落，其余岩层自下而上呈倒台阶式冒落，塌落部分为拱形，远离采场的岩层受扰动较小。

如果仍然取上面的计算模型，但增加摩擦角和粘聚力，取  $c = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ ， $\phi = 20^\circ$ ，其他的参数均不改变，计算的结果见图 9, 10，不难得到以下有趣的结论：

- (1) 随着摩擦角和粘聚力的增加，计算所用的时步也随计算的时间大大增加。
- (2) 由于摩擦和粘聚力的关系，并非所有的悬空块都冒落。如图 8(a)所示，左边的 1, 2, 3 号块

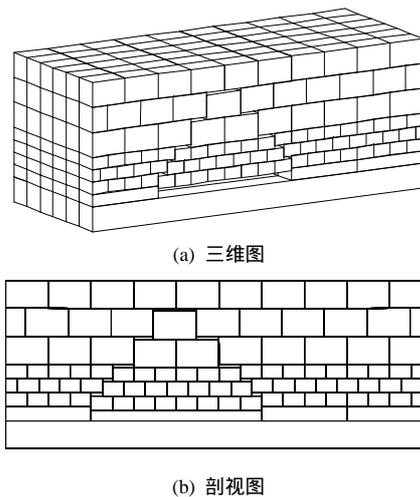


图 7 开挖后计算 30 步的三维图和剖视图(无摩擦力和粘聚力)

Fig.7 Results of analysis after 30 steps (3D view without friction and cohesion)

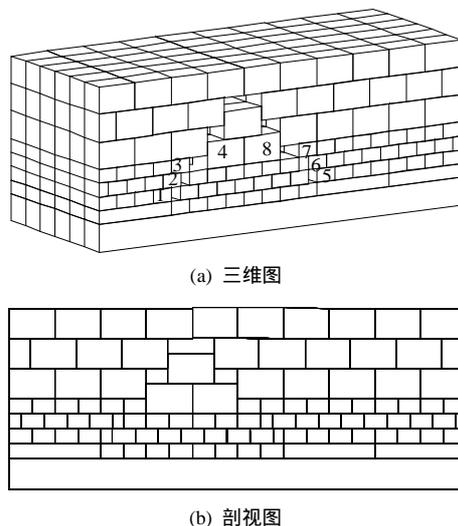


图 8 开挖后计算 100 步的三维图和剖视图(无摩擦力和粘聚力)

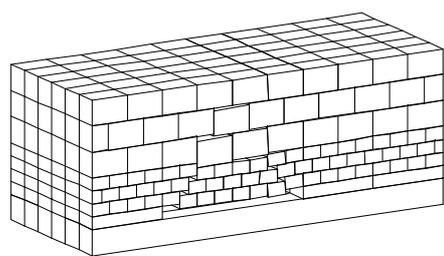
Fig.8 Results of analysis after 100 steps (3D view with out friction and cohesion)

和右边的 5, 6, 7 号块均没有冒落。  
 (3) 由于左右两边边界的不对称，两边冒落的情况呈轻微的不对称。

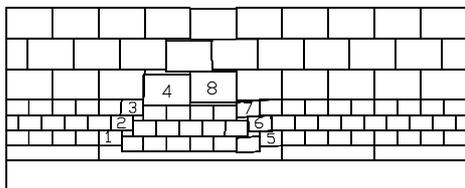
(4) 8 号块由于受到 7 号块左上角的尖顶而没有随 4 号块同时冒落。

### 6 结论与展望

实际的岩土工程问题都是三维问题，所以，三维的计算方法的发展是非常重要的和迫切的。目前，三维有限元、离散元、DDA 等方法都得到了有效



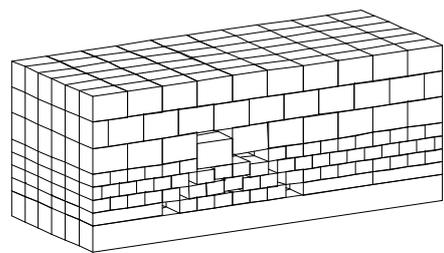
(a) 三维图



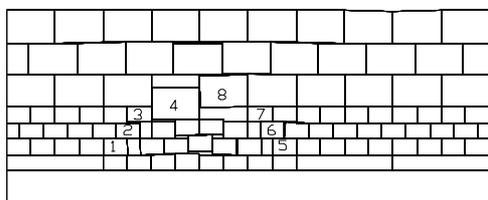
(b) 剖视图

图9 开挖后计算400步的三维图和剖视图(有摩擦力和粘聚力)

Fig.9 Results of analysis after 400 steps (3D view with friction and cohesion)



(a) 三维图



(b) 剖视图

图10 开挖后计算900步的三维图和剖视图(有摩擦力和粘聚力)

Fig.10 Results of analysis after 900 steps (3D view with friction and cohesion)

的发展,但三维的流形元理论尚未见到。本文介绍了基于六面体单元的三维数值流形方法的基本理论,并推导了相应平衡方程的刚度、初始应力、点荷载、体荷载、惯性力、固定点、法向接触、切向接触和摩擦力子矩阵,有了这些子矩阵,就可以很方便的组建总体平衡方程和编制程序。在二维接触中,切向应力和摩擦力的方向很容易沿着接触边得到,但在三维问题中要在接触面上确定该方向是非常困难的,这也是所有计算方法在遇到三维接触时的难题。本文引入了向量理论和迭代方法,避开了

相应困难的干扰。最后,作者用三维程序模拟了一个煤矿长壁工作面覆岩失稳的过程,所得结果与实际情况基本相符,从而印证该三维方法的正确性。伴随着我国经济的腾飞,大量基础建设项目的涌现,三维数值流形方法将具有广阔的应用价值和发展前景。

### 参考文献

- 1 Shi G H. Manifold method of material analysis[A]. In : Transaction 9<sup>th</sup> Army Conference on Applied Mathematics and Computing[C]. Minneapolis, USA : [s. n.], 1991, 57 ~ 76
- 2 Shi G H. Manifold method[A]. In : Proceedings of the First International Forum on DDA and Simulations of Discontinuous Media[C]. Berkeley USA : [s. n.], 1996, 52 ~ 204
- 3 Shi G H. Numerical manifold method[A]. In : Proceedings of the Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation[C]. Kyoto, Japan : [s. n.], 1997, 1 ~ 35
- 4 孙 跃. 流形元与有限元变形和渗流的非同步耦合分析及其应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(6): 943 ~ 950
- 5 陈 刚, 刘佑荣. 流形元覆盖系统的有向图遍历生成算法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(5): 711 ~ 716
- 6 张勇慧, 郑榕明. DDA 方法的改进(英文)[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(2): 109 ~ 111
- 7 Cheng Y M. Advancement and improvements in discontinuous deformation analysis[J]. Computers and Geotechnics, 1998, 22(2): 153 ~ 163
- 8 Cheng Y M, Zhang Y H. Rigid body rotation and internal block discretization in DDA analysis[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2000, 24 : 567 ~ 578
- 9 Cheng Y M, Zhang Y H. Coupling of FEM and DDA methods[J]. International Journal of Geomechanics, 2002, 2(4): 503 ~ 517
- 10 郑榕明, 张勇慧. 数值流形方法及其在地下洞室开挖稳定性分析中的应用[A]. 见: 全国岩土工程与学术大会论文集[C]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2003, 1 159 ~ 1 164
- 11 Cheng Y M, Zhang Y H, Cheng W S. Wilson non-conforming element in numerical manifold method[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2002, 18 : 877 ~ 884
- 12 Cundall P A, Hart R D. Development of generalized 2D and 3D distinct element programs for modeling jointed rock[R]. USA : Itasca Consulting Group, 1985
- 13 焦玉勇. 三维离散单元法及其应用[博士学位论文][D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 1998
- 14 姜清辉. 三维非连续变形分析方法的研究[博士学位论文][D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2000
- 15 Cheng Y M, Chen W S, Ger X R. Procedure to the detect of three-dimensional blocks using penetration edges method[A]. In : Proceeding of 3<sup>rd</sup> International Conference on Discontinuous Deformation Analysis[C]. New York : Geotechnical Special Publication, 2002, 79 ~ 85