

# 拥挤条件下公交系统的拟动态均衡配流模型

高自友<sup>1</sup>, 任华玲<sup>1</sup>, 林兴强<sup>2</sup>

(1. 北方交通大学交通运输学院, 北京 100044; 2. 香港理工大学土木工程系, 香港)

**摘要:** 论文考虑了由于公交线路运营能力不足造成的车站排队拥挤现象, 在此基础上构造了拥挤条件下公交系统的拟动态均衡配流模型. 该模型可自动估计不同时段内拥挤条件下的公交流量和车站的乘客排队, 特别是在非常拥挤的情况下(即乘客需求超过公交网络运营能力)也能够进行流量分配, 并确定车站的乘客排队长度. 因此, 该模型较好地反映了公交网络的拥挤效应. 所给算例说明了不同需求条件下该公交均衡配流模型的应用.

**关键词:** 拥挤; 公交配流; 时间相关

**中图分类号:** U121; O221.3

## A Time-dependent Transit Equilibrium Assignment Model for Congested Transit Network

GAO Zi-you<sup>1</sup>, REN Hua-ling<sup>1</sup>, Lam W H K<sup>2</sup>

(1. School of Traffic & Transportation, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. Department of Civil & Structural Engineering, Hongkong Polytechnic University, HongKong)

**Abstract:** This paper presents a new transit equilibrium assignment model for congested public transport networks with passenger queues at stations, in which both the transit demand and the passenger queues are time-dependent under several continuous periods. The model can estimate simultaneously transit link flows and passenger queues at transit stations in the study period. Especially, in very congested condition, passenger demands can be assigned and passenger queues at the congested stations can also be determined by the proposed model in the study period. Numerical examples are used to illustrate the applications of the time-dependent transit assignment equilibrium model to various demands.

**Keywords:** congestion; transit equilibrium assignment; time-dependent

**CLC number:** U121; O221.3

### 1 引言

在过去的30年里, 虽然关于交通均衡配流的模型及算法方面已取得了许多重要成果<sup>[1,7]</sup>, 但成果主要集中在道路交通网络均衡配流问题上. 相对来说, 考虑公共交通均衡配流问题的成果较少<sup>[4,9]</sup>, 而且, 现有的一些公交均衡配流模型一般也不考虑公交线运营能力不足对公交均衡配流的影响, 即假定所有的公交线在高峰期都有无限的运载能力. 显然这种假定在高峰期是不切合实际的, 尤其在亚洲地区一些拥挤的大城市里更是如此.

实际上, 由于每个乘客都是按照他自己个人的意愿来选择固定的公交线路, 所以公交均衡配流问题比道路交通配流问题要困难得多. 在所有影响乘客决策的因素中, 车站的等待时间是最重要的因素之一. 由于乘客的等待时间与公交车到达车站的相对频率、乘客的到达方式及公交线路能力有关, 所以在拥挤情况下要估计乘客的等待时间是非常困难的.

De Cea 和 Fernández(1993)在引入了“公交线路”和“实际频率”等概念的基础上给出了一个

收稿日期: 2002-01-16

基金项目: 国家自然科学基金(19971002, 79970014)、教育部跨世纪优秀人才基金以及教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划项目资助

高自友: 北方交通大学教授, 博士生导师, 主要从事系统分析研究.

拥挤条件下的公交均衡配流模型。他们所使用的等待时间函数类似于道路交通中的 BPR 公式,即完全不考虑公交线路运营能力的限制,虽然便于计算,但可能不太符合实际情况。

Wu 等人(1994)提出了一个公交均衡配流问题的推导方法,其中公交车流的拥挤现象用非线性的阻抗函数来描述,也不考虑公交线路的能力限制,显然此假定仍只是为了便于计算。

在上述的模型中,一个重要的假设是:所有乘客在任一车站都能乘上属于某吸引集中到达的第一辆公交车,即完全不考虑公交线路的能力限制,而实际情况是,由于拥挤效应乘客可能上不了第一辆公交车而必须等待下一辆或转乘其它线路的公交车。

众所周知,在公交高峰期,整个公交需求变化很快,而且经常会超出公交网络的运载能力。现有研究都没有考虑这种情况,而只是把这种情况看作是乘载量超过运载能力的超载现象,这显然是不太现实的。在拥挤的公交网络中,某些线路在高峰期确实出现暂时地超载,这就需要通过划分具体的时间段来处理,一般我们将此种处理方法称为拟动态(time-dependent)方法。

为了克服前述拥挤条件下公交配流模型中存在的局限性,本文使用时间相关的 OD 需求为有乘客排队现象的拥挤公交系统建立了一个拟动态的公交均衡配流模型,考虑了由于公交车运载能力不足引起的乘客排队现象。显然,一个研究的时段可以分成许多连续的子时段,考虑用一系列稳态排队均衡配流问题来逼近动态均衡配流问题,从而可以产生一系列易于求解的数学规划问题(Bell 等,1996)。论文在前人研究的基础上,尤其是在 De Cea 和 Fernández(1993)等的研究成果的基础上,做了一些更为深入的研究工作:考虑了由于公交线运营能力不足造成的车站排队拥挤现象,在此基础上构造了拥挤条件下公交系统的拟动态均衡配流模型。该模型可自动估计不同时段内拥挤条件下的公交流量和车站的乘客排队长度,特别是在非常拥挤的情况(即乘客需求超过公交网络的运营能力)下也能够进行流量分配,并确定车站的乘客排队长度。因此,该模型较好地反映了公交网络的拥挤效应。

## 2 定 义

### 2.1 公交网络描述

一个公交网络由一组车站及连接车站的公

路段组成,每条公路路段都有一组公交线,乘客只能在车站才能上、下车或转乘其它公交线。在分析公交配流问题时需经常使用以下几个概念。

公交线:沿一组固定节点及路段行驶的公交车线路。

公交区段:公交线路任意 2 节点间的部分(2 节点不一定相邻)。

出行路线:公交网络上任意 2 节点间可出行的路径,一般地,它应包括一系列节点:第一个节点为起节点,最后一个节点为迄节点,中间节点为通过或转乘节点(如果在同一节点有 2 条或更多公交线)。

给定公交网络  $G=(N, \varphi)$ ,其中  $N$  是节点集,代表公交车站; $\varphi$  是路段集,代表公路路段,本文对应于以下 2 类。

1) 等车路段,代表在车站的等车过程(此为虚拟路段)。

2) 行车路段,与实际的公路路段相对应。

在网络的每一个节点,都有一个等车路段与离开此节点的公路路段相连,它表示乘客在车站的平均等车时间,乘客可以根据自己的出行目的和喜好选择任一条通过此路段(包括等车路段和行车路段)的线路。通常我们可以把等车路段和行车路段合二为一。

为了便于构造数学模型,论文引入了组合路段的概念。所谓组合路段就是将一个 OD 对间具有相同起迄点和换乘点的公交线路合并成一条路段的虚拟路段。它由一系列公交线路组成,每个组合路段就是一个 OD 对间的一个公交区段。

例如,一个由 6 条公交线及 4 个节点组成的原始网络,如图 1 所示,从  $N_1$  到  $N_3$  这个 OD 对有 9 条路径。图 2 是同一个公交网络图按组合路段的概念来表示的,此时只有 3 条对应的组合路径,即  $S_1, S_2-S_5, S_3-S_4-S_5$ 。与图 1 比较,图 2 由于引入了组合路段的概念,而每条组合路径都是由不同的组合路段组成,从而大大减少了描述一个公交网络所需的路径数。这种表示法是由 De Cea 和 Fernández(1993)首次提出的。

### 2.2 基本符号

考虑公交网络  $G=(N, \varphi)$ ,其中  $N$  是节点的集合, $\varphi$  是组合路段的集合。在所研究的时段  $T$  内,全文使用如下的符号定义。

$W$ : OD 对的集合。

$w$ : 集合  $W$  的元素。

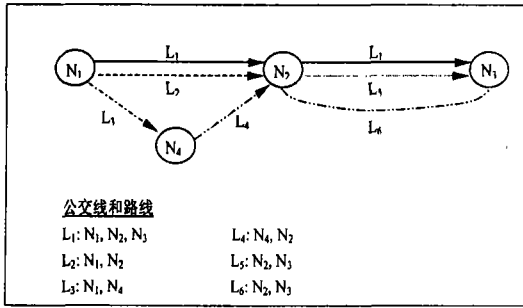


图1 用公交线路描述的公交网络

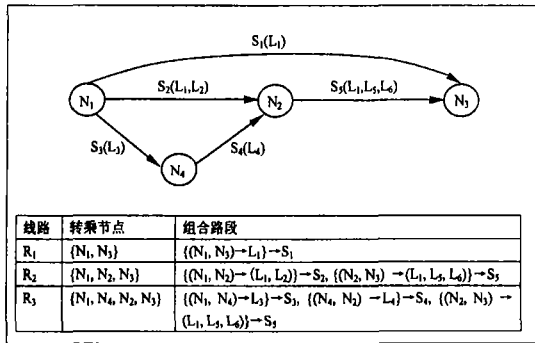


图2 用组合路段描述的公交网络

$A_s$ : 公交网络中组合路段  $s$  的集合。

$\bar{A}_s$ : 与组合路段  $s$  对应的吸引集(吸引集的定义见 2.4 节)。

$A$ : 组合路段-组合路径的关联矩阵。

$a_{sr}$ :  $A$  的一个元素,若组合路段  $s$  属于组合路径  $r$ ,则为 1,否则为 0。

$B$ : 组合路径-OD 的关联矩阵。

$b_{kj}$ :  $B$  的元素,若组合路径  $j$  连接 OD 对  $k$ ,则为 1,否则为 0。

$i(s)$ : 组合路段  $s$  的起节点。

$f_{lT}$ : 时段  $T$  内公交线路  $l$  的发车频率。

$k_{lT}$ : 时段  $T$  内公交线路  $l$  的运营能力。

$f_{sT}$ : 时段  $T$  内组合路径  $s$  的总频率 ( $f_{sT} =$

$$\sum_{i \in \bar{A}_s} f_{iT}$$

$$K_{sT}: \text{时段 } T \text{ 内组合路段 } s \text{ 的运营能力 } (K_{sT} = \sum_{i \in \bar{A}_s} k_{iT})$$

$K_T$ : 时段  $T$  内组合路段  $s$  的运营能力向量。

$r_{kT}$ : 时段  $T$  内 OD 对  $k$  的公交乘客需求量。

$r_T$ : 时段  $T$  内 OD 公交乘客需求向量。

$V_{sT}$ : 时段  $T$  内组合路段  $s$  上的乘客流量。

$V_T$ : 时段  $T$  内的组合路段乘客流向量。

$q_{sT}$ : 时段  $T$  末组合路段  $s$  上的乘客排队长度。

$q_T$ : 时段  $T$  末的乘客排队长度向量。

$h_{jT}$ : 时段  $T$  内组合路径  $j$  的乘客流量。

$h_T$ : 时段  $T$  内的组合路径乘客流向量。

$\bar{t}_{sT}$ : 时段  $T$  内的组合路段  $s$  上公交车的正常行驶时间(零流时间)。

$v'_{lT}$ : 时段  $T$  内经过组合路段  $s$  的公交线路  $l$  的乘客流量。

$t_{sT}$ : 时段  $T$  内组合路段  $s$  上的平均出行时间。

### 2.3 阻抗函数

在拥挤的公交网络中,公交车站的排队过程是一个复杂的排队系统,乘客以给定的平均速率随机地到达车站,并乘上经过此车站的不同公交线路的公交车。考虑不同的乘客排队现象,每一排队与经过车站的一个吸引集中的公交线路相对应,乘车率与相应的吸引集中公交线路的运营能力有关。

当某公交车站乘客的到达量不断增加且到达此站的公交车已满或剩余能力不足时,第一辆到达的公交车将不能带走在此站等待的所有乘客,乘客的等待时间就会变得很长,从而引起乘客排队。实际上,乘不上第一辆公交车的乘客会选择等待下一辆公交车或换乘其它线路的公交车。

一般地,到达组合路段  $s$  的起点  $i(s)$  的乘客所感觉到的等待时间与以下因素有关。

1)  $f_{sT}$ : 时段  $T$  内组合路段  $s$  的总频率。

2)  $V_{sT}$ : 时段  $T$  内组合路段  $s$  上从节点  $i(s)$  上车的乘客流量。

3)  $V_{sT}^+$ : 在节点  $i(s)$  上车,并且与组合路段  $s$  有相同公交线路的其它组合路段上此公交线路的乘客流量。

4)  $\bar{V}_{sT}$ : 时段  $T$  内,在  $i(s)$  之前的节点上车,经过节点  $i(s)$ ,并在  $i(s)$  节点之后下车,且与路段  $s$  有相同公交线路的所有其它组合路段上此公交线路的乘客流量。

5)  $K_{sT}$ : 时段  $T$  内组合路段  $s$  的运营能力。

6)  $q_{sT}$ : 时段  $T$  末组合路段  $s$  上的乘客排队长度。

显然,  $V_{sT}^+$  与  $V_{sT}$  在  $i(s)$  点竞争属于组合路段  $s$  的所有公交线路的剩余能力,而  $\bar{V}_{sT}$  的值约束这个能力。记  $S_{i(s)}^+$  为时段  $T$  内从节点  $i(s)$  上车的、且与组合路段  $s$  有相同公交线路的所有其它组合路段的集合,  $\bar{S}_{i(s)}$  为时段  $T$  内,在  $i(s)$  之前的节点上车,经过节点  $i(s)$ ,并在  $i(s)$  节点之后下车,且与路段  $s$  有相同公交线路的所有其它组合路段的集合。从而可以得到

$$\begin{aligned} \bar{V}_{sT} &= V_{sT}^+ + \bar{V}_{sT} \\ &= \sum_{i \in A_s} \sum_{r \in S_{i(s)}^+} v_{ir}^T + \sum_{i \in \bar{A}_s} \sum_{r \in \bar{S}_{i(s)}} v_{ir}^T \quad (1) \end{aligned}$$

这里  $\bar{V}_{sT}$  代表与  $V_{sT}$  竞争同一通过能力的流量。

考虑到组合路段  $s$  的运营能力, 显然应有下面的约束条件

$$V_{sT} + \bar{V}_{sT} \leq K_{sT}, \quad s \in \varphi \quad (2)$$

我们令  $\bar{V}_T$  为时段  $T$  内  $\bar{V}_{sT} (s \in \varphi)$  的向量表示。

例 1 下面用 De Cea 和 Fernández (1993) 的一个例子来说明  $\bar{V}_{sT}$  的概念, 如图 3 的公交网络有 4 条公交线。

- $L_1$ : 直接从 A 到 B 的高速路。
- $L_2$ : 从 A 到 Y 的公交线, 在 X 可能换乘。
- $L_3$ : 从 X 到 B 的公交线, 在 Y 可以换乘。
- $L_4$ : 从 Y 到 B 的公交线。

变换后的网络如图 4 所示。

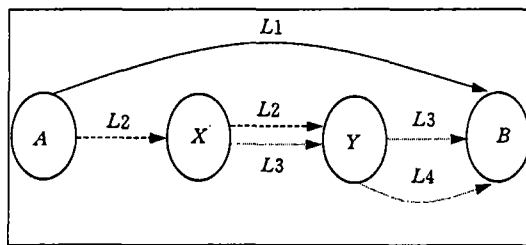


图 3 变换前的公交网络

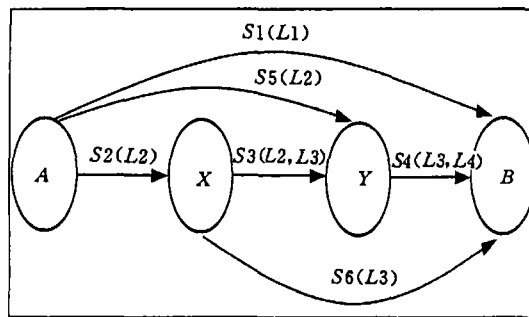


图 4 变换后的公交网络

显然, 在时段  $T$  内,  $V_{3T}$  代表在 X 点上车经过组合路段 3 的流量;  $V_{X3T}^+$  代表在 X 点上车, 并与组合路段 3 有相同公交线 ( $L_2, L_3$ ) 的所有其它组合路段的流量;  $\bar{V}_{X3T}$  代表在 X 之前的节点上车, 经过节点 X, 并在 X 点之后下车, 且与组合路段 3 有相同公交线的所有其它组合路段的流量。

因此由等式(1)就有

$$\bar{V}_{3T} = V_{X3T}^+ + \bar{V}_{X3T} = V_{6T} + V_{5T}$$

它代表与  $V_{3T}$  竞争同一运营能力的流量。

显然, 在拥挤的公交网络中只有一部分乘客能乘上吸引集中第一辆到达车站的公交车。在给定的乘客到达模式及公交车到达模式的条件下, 为了给乘客的等待时间建立适当的数学模

型, 论文需要下面 2 个假设: 一是乘客在每个节点首先会考虑一组可乘坐的公交线(吸引集), 他会乘上吸引集中第一辆到达的公交车; 二是那些不能乘上吸引集中第一辆到达的公交车的乘客将会乘上吸引集中下一辆到达的公交车。

如果所有的乘客都能乘上吸引集中第一辆到达的公交车, 则车站没有剩余乘客, 此时在组合路段  $s$  上的平均等待时间就是组合路段  $s$  的总频率的倒数的一半(假设乘客的到达服从均匀分布, 且到达公交车的频率是相同的<sup>[8]</sup>)。然而如果存在拥挤, 则有些乘客必须等待下一辆公交车, 那么他们在组合路段  $s$  上就应有一个延迟时间。

综上所述, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \text{时段 } T \text{ 内乘客在组合路段 } s \text{ 的起点 } i(s) \text{ 处的} \\ \text{总等待时间} &= (V_{sT} + q_{sT})(\alpha/f_{sT}) + q_{sT}(1/f_{sT}) \\ &= (V_{sT})(\alpha/f_{sT}) + q_{sT}(1 + \alpha)/f_{sT} \quad (3) \end{aligned}$$

这里  $\alpha$  是一个校正参数,  $\alpha$  一般取 0.5 或 1<sup>[8]</sup>。

因此由(3)式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \text{时段 } T \text{ 内乘客在组合路段 } s \text{ 上的总出行时间} &= (t_{sT} + \alpha/f_{sT})V_{sT} + q_{sT}(1 + \alpha)/f_{sT} \\ &= t_{sT}V_{sT} + d_{sT}q_{sT} \quad (4) \end{aligned}$$

其中时段  $T$  内组合路段  $s$  上的平均出行时间和平均排队延迟时间分别为

$$\begin{aligned} t_{sT} &= t_{sT} + \alpha/f_{sT}, \\ d_{sT} &= \begin{cases} (\alpha + 1)/f_{sT}, & \text{如果 } q_{sT} > 0 \\ 0, & \text{如果 } q_{sT} = 0 \end{cases} \quad (5) \end{aligned}$$

其中  $t_{sT}$  是公交车在组合路段  $s$  上的自由行驶时间,  $f_{sT}$  是时段  $T$  内组合路段  $s$  上的总频率,  $\alpha$  是校正参数。

### 2.4 共线问题及吸引集的计算

公交网络上任一对节点间共线现象的存在使得公交均衡配流问题模型的构造变得很困难。为了更好地分析困难所在, 下面简要介绍一下共线问题的定义及表述。非拥挤网络的共线问题及算法可详见 Chriqui 和 Robillard (1975) 及 Spiess 和 Florian (1989); 共线问题在拥挤网络的推广可参见 De Cea 和 Fernández (1993)。

我们考虑  $G = (N, \varphi)$  的 2 个相邻节点  $N_1$  和  $N_2$ , 假定  $A_i$  是从  $N_1$  到  $N_2$  的所有公交线的集合。假设一个乘客为了使自己的出行时间最少, 而只考虑  $A_i$  的一个子集  $\bar{A}_i (\bar{A}_i \subseteq A_i)$ 。按这种选择, 他会乘上第一辆到达  $N_1$  并属于  $\bar{A}_i$  的公交线  $l$  的公交车, 所感觉到的  $N_1$  到  $N_2$  的出行时间为

$$TV(N_1, N_2) = W_{\bar{A}_i} + T_{\bar{A}_i} \quad (6)$$

这里  $W_{\bar{A}_i}$  和  $T_{\bar{A}_i}$  分别表示乘客所感觉到的等待时间和行驶时间. 所有的  $l \in \bar{A}_i$  就是  $N_1$  到  $N_2$  的吸引集中的公交线. 记  $f_l$  和  $t_l$  分别是公交线  $l \in A_i$  的频率和行驶时间, 并且都是固定的. 乘客的等待时间看作是独立的自由变量, 其均值为  $\alpha/f_l$ . 这样, 可用下面的问题(P1)来确定吸引集  $\bar{A}_i$ ,

$$(P1) \quad \min_{(x_l)} \frac{\alpha + \sum_{l=1}^k t_l f_l x_l}{\sum_{l=1}^k f_l x_l}$$

s. t.  $x_l = 0$  或  $1, \forall l \in A_i$ ,

这里目标函数是求总出行时间最小.

一条公交线  $l \in A_i$ , 当  $x_l = 1$  时就属于吸引集; 否则就不属于吸引集.

用来简化吸引集计算的一个一般假设是  $A_i$  的所有的公交线都有相同的行驶时间. 在此假定下, 所有的公交线都属于吸引集, 乘客所感觉到的总出行时间为

$$TV(N_1, N_2) = \frac{\alpha + \sum_{l=1}^k t_l f_l}{\sum_{l=1}^k f_l} \quad (7)$$

当  $N_1$  与  $N_2$  之间公交线提供同样服务并且使用同一路线时, 这种假定是有道理的, 但若存在特殊服务(如局部服务或特快服务)时就不正确了.

当考虑拥挤条件下的公交网络时, 再用(P1)来确定吸引集就不合适了. 为了解决这一问题, De Cea 和 Fernández(1993)定义了一种变换的公交网络, 其中给定的 2 个节点之间可以产生不止一条的组合路段. 第一条组合路段与(P1)解出的吸引集对应, 此集合包含最快的公交线. 如果节点  $N_1$  与  $N_2$  之间还有其它公交线可用, 那么考虑那些未包含进第一条组合路段中的公交线, 再解一个分式线性规划问题(P1), 这样就添加了一条平行的组合路段.

继续这个过程直到所有公交线都与某条组合路段对应, 此时每一组合路段都与一个固定的吸引集对应. 注意: 与给定 OD 对对应的公交线的数量会随拥挤程度而变化. 因为当客流增加时, 为了保持备选组合路径的均衡条件, 那些包含较慢公交线的平行组合路段也被使用了. 我们定义  $\bar{B}_i$  为与新网络  $G' = (N, \phi)$ ,  $\phi \subseteq \phi$  的每条组合路段对应的公交线集.

按照这种方法, 完全可以事先确定网络  $G' = (N, \phi)$ . 因此, 我们只需在公交网络  $G' = (N,$

$\phi)$  上分析公交均衡配流问题.

## 2.5 公交线上流量的分配

下面就来考虑如何把组合路段流  $V_s$  分配到属于组合路段  $s \in \phi$  的吸引集中的公交线上. De Cea 和 Fernández(1993)假定使用组合路段  $s$  中的每条公交线的流量与它的实际频率成比例, 这导出一个非线性约束问题, 为求解这个问题, 使用了一个简化的公式, 即组合路段  $s$  上分配给各公交线的流量直接与它们在组合路段  $s$  上的频率成比例. 显然这种方法若用于拥挤情况一般就不符合实际了.

一般地,  $v_{sT}^i$  定义为时段  $T$  内在组合路段  $s$  的起点  $i(s)$  使用公交线  $l \in \bar{B}_i$  的流量, 它与  $f_{lT}$ ,  $k_{lT}$ ,  $V_{sT}$ , 及  $q_{sT}$  有关.

显然, 有

$$V_{sT} = \sum_{l \in \bar{B}_i} v_{sT}^i, \quad s \in \phi \quad (8)$$

进一步, 在拥挤的情况下, 到达节点的吸引集中的公交车中会有一部分已满或剩余能力不足, 为了描述这一现象, 我们为每一到达节点的公交线引入“实际频率”的概念. 当系统不存在拥挤时, 公交线的实际频率与其正常频率是相等的. 随着拥挤的加剧, 乘客在车站的等待时间就会增加, 而实际频率随之降低. 这样, 乘客要乘上拥挤线上的公交车就会变得很困难. 因此实际频率  $f_{lT}^i$  描述了时段  $T$  内拥挤公交系统中组合路段  $s$  包含的公交线  $l$  的特性, 并且总有  $f_{lT}^i \leq f_{lT}$ , ( $l \in \bar{B}_i, s \in \phi$ ).

为了给出实际频率的定义, 我们为每一个到达节点  $i(s)$  的公交线定义一个乘客实际平均等待时间指标

$$w_{i(s)}^i = \alpha_i / f_{lT}^i + [q_{sT} / (V_{sT} + q_{sT})] (1 / f_{lT}^i)$$

这里  $\alpha_i$  是校正参数. 注意:  $w_{i(s)}^i$  只是一个定义, 并不是说乘客等待某条公交线, 而实际上, 乘客应是等待整个吸引集中的所有公交线. 它只是一个时间指标, 给定  $V_{sT}$  和  $q_{sT}$  就可以计算出来.

下面说明一下这个定义是有意义的.

显然, 时段  $T$  内, 在节点  $i(s)$  乘上属于组合路段  $s$  的吸引集中的公交线  $l$  的乘客比例应为

$$P_{i(s)}^i = v_{sT}^i / V_{sT} \quad (9)$$

则有

$$v_{sT}^i = P_{i(s)}^i \cdot V_{sT} \quad (10)$$

如果  $q_{sT} > 0$ , 那么, 时段  $T$  内在路段  $s$  的起点  $i(s)$  处等待公交线  $l$  的乘客数量就应为

$$P_{i(s)}^i \cdot q_{sT} \quad (11)$$

从而就有时段  $T$  内到达  $i(s)$  处公交线  $l$  的所有乘客的“实际等待时间指标”=

$$(v'_{iT} + P_{i(s)}^i \cdot q_{iT})(\alpha_i / f_{iT}) + P_{i(s)}^i \cdot q_{iT}(1 / f_{iT}) \quad (12)$$

因此,时段  $T$  内到达  $i(s)$  处公交线  $l$  的“实际平均等待时间指标”为

$$w_{i(s)} = (\alpha_i / f_{iT}) + [P_{i(s)}^i \cdot q_{iT} / (v'_{iT} + P_{i(s)}^i \cdot q_{iT})](1 / f_{iT}) \quad (13)$$

由(10)可以得到

$$w_{i(s)} = (\alpha_i / f_{iT}) + [q_{iT} / (V_{iT} + q_{iT})](1 / f_{iT}) \quad (14)$$

现在利用等待时间指标与频率之间的关系,可以定义时段  $T$  内节点  $i(s)$  处公交线  $l$  的“实际频率”为

$$f'_{iT} = \alpha_i / w_{i(s)}, \quad l \in \bar{B}_s, s \in \phi \quad (15)$$

显然,由时段  $T$  内节点  $i(s)$  处公交线  $l$  的实际频率的定义可以看出:如果不存在拥挤,则实际频率  $f'_{iT}$  的值与公交车站无关,而等于正常频率  $f_{iT}$ ;如果存在拥挤,即  $q_{iT} > 0$ ,那么相应的实际频率就会减少,也即总有  $f'_{iT} \leq f_{iT}$ .

从而我们可以定义时段  $T$  内路段  $s$  的实际频率  $f_{iT}$  为

$$f_{iT} = \sum_{i \in \bar{B}_s} f'_{iT}, \quad s \in \phi$$

则在给定组合路段  $s$  上使用每条公交线的乘客数量就应与它的相对频率成比例,即

$$v'_{iT} = (f'_{iT} / f_{iT}) \cdot V_{iT} \quad (16)$$

由(15)(16),可以得到

$$v'_{iT} = \frac{\alpha_i \{ \alpha_i / f_{iT} + [q_{iT} / (V_{iT} + q_{iT})](1 / f_{iT}) \}^{-1}}{\sum_{i \in \bar{B}_s} \alpha_i \{ \alpha_i / f_{iT} + [q_{iT} / (V_{iT} + q_{iT})](1 / f_{iT}) \}^{-1}} \cdot V_{iT}, \quad l \in \bar{B}_s, s \in \phi \quad (17)$$

上式可简写为

$$v'_{iT} = \Gamma(V_{iT}, q_{iT}) V_{iT}, \quad l \in \bar{B}_s, s \in \phi \quad (18)$$

其中  $\Gamma(V_{iT}, q_{iT})$  是  $V_{iT}$  和  $q_{iT}$  的函数,  $\forall s \in \phi$ .

显然由(17),可以得到

$$V_{iT} = \sum_{i \in \bar{B}_s} v'_{iT}, \quad s \in \phi$$

通常为简单起见,可使用以下简化的线性公式<sup>[4]</sup>

$$v'_{iT} = \frac{f'_{iT}}{\sum_{i \in \bar{B}_s} f'_{iT}} V_{iT}, \quad l \in \bar{B}_s, s \in \phi \quad (19)$$

显然这是(17)式的特例.

### 3 数学模型及求解算法

与时间相关的 OD 流是所构造模型的输入端,但是注意这里的配流仅仅是时间相关的,而

不是完全动态的. 通过把一个时段的排队转入下一个时段,所给模型可以考虑高峰期公交网络的暂时超载现象. 考虑用一系列稳态排队均衡配流问题来逼近动态均衡配流问题,从而可以产生一系列易于求解的数学规划问题<sup>[1]</sup>. 此种配流过程一般可称为拟动态均衡配流过程.

#### 3.1 公交均衡配流模型

考虑公交网络  $G' = (N, \phi)$  上的配流问题. 在某个确定的时段  $T$  内,车站乘客排队的变化  $(q_T - q_{T-1})$  等于车站流入量  $(Ah_T)$  减去上车流量  $(V_T)$ ,就是说,网络  $G' = (N, \phi)$  上的任意流量集都必须满足如下的守恒约束

$$r_T = Bh_T \quad (20)$$

$$V_T = Ah_T - (q_T - q_{T-1}) \quad (21)$$

$$h_T \geq 0, q_T \geq 0 \quad (22)$$

这里  $q_{T-1}$  在时段  $T-1$  已确定. 注意:时段  $T$  开始的队列与时段  $T-1$  末的队列完全是一样的,这样,在时段  $T$ ,  $q_{T-1}$  是已知的.

流量集  $\{V_T, q_T\}$  若满足约束(20)~(22)及下面的约束就称为是可行流

$$V_T + \bar{V}_T \leq K_T \quad (23)$$

$$v'_{iT} = \Gamma(V_{iT}, q_{iT}) V_{iT}, \quad l \in \bar{B}_s, s \in \phi \quad (24)$$

其中  $\bar{V}_T = (\dots, \bar{V}_{iT}, \dots)^T$ ,  $\bar{V}_{iT}$  由(1)式确定.

考虑如下的优化问题

$$(P2) \quad \min_{h_T, q_T} \sum_i (t_{iT} V_{iT} + d_{iT} q_{iT} + t_{iT} q_{iT})$$

$$\text{s. t. } r_T = Bh_T \quad (25)$$

$$V_T = Ah_T - (q_T - q_{T-1}) \quad (26)$$

$$V_T + \bar{V}_T \leq K_T \quad (27)$$

$$h_T \geq 0, q_T \geq 0 \quad (28)$$

其中组合路段  $s$  上使用各条公交线的流量由下式确定

$$v'_{iT} = \Gamma(V_{iT}, q_{iT}) V_{iT}, \quad l \in \bar{B}_s, s \in \phi \quad (29)$$

(P2)的目标函数中,第一项是时段  $T$  内组合路段  $s$  上在  $i(s)$  处上车乘客的总出行时间,第二项是时段  $T$  内组合路段  $s$  上在  $i(s)$  处末乘上公交车的乘客的排队延迟时间,第三项的构造没有什么经济学动机,纯粹出自数学上的推证方便. 这里  $t_{iT}$  和  $d_{iT}$  由(5)式给出. 等式(25)是 OD 流产生的组合路径流约束,(26)式描述时段之间的联接关系,只要时段  $T$  开始的初始排队长度  $q_{T-1}$  给出,就能根据(P2)确定时段末的排队长度,(27)式是组合路段的通过能力约束.

下面我们将证明上述优化模型(P2)确实描

述了与时间相关的公交配流的用户均衡等价条件. 为简单起见, 下面的证明中我们将用等式(19)来代替(P2)中的(29)式.

**证明** 问题(P2)的拉格朗日函数构造如下

$$L = \sum_s (t_{iT}V_{iT} + d_{iT}q_{iT} + t_{iT}q_{iT}) + u_T^T(r_T - Bh_T) + m_T^T(K_T - V_T - \bar{V}_T) \quad (30)$$

其中  $u_T$  和  $m_T$  分别为(25)式和(27)式的对应拉格朗日乘子向量.

最优解处的  $K-T$  条件如下, 其中组合路径  $j$  连接 OD 对  $k$

$$\sum_j a_{ij}(l_{iT} + \alpha/f_{iT}) - \sum_j a_{ij}(m_{iT}) + \sum_{i \in B_i, i \in S} \frac{f_{iT}^i}{\sum_{i \in B_i} f_{iT}^i} m_{iT} - u_{kT} \geq 0,$$

及  $h_{jT} \geq 0, \forall j$  (31)

$$\left( \sum_j a_{ij}(l_{iT} + \alpha/f_{iT}) - \sum_j a_{ij}(m_{iT}) + \sum_{i \in B_i, i \in S} \frac{f_{iT}^i}{\sum_{i \in B_i} f_{iT}^i} m_{iT} \right) - u_{kT} h_{jT} = 0, \forall j$$

$$r_{kT} = \sum_j b_{kj} h_{jT}, \forall k \quad (32)$$

$$V_{iT} + \bar{V}_{iT} \leq K_{iT},$$

及  $m_{iT} \leq 0, \forall s \in \phi$  (33)

$$m_{iT}(K_{iT} - V_{iT} - \bar{V}_{iT}) = 0, \forall s \in \phi \quad (34)$$

$$m_{iT} + \sum_{i \in B_i, i \in S} \frac{f_{iT}^i}{\sum_{i \in B_i} f_{iT}^i} m_{iT} + d_{iT} \geq 0$$

及  $q_{iT} \geq 0, \forall s \in \phi$  (35)

$$\left( m_{iT} + \sum_{i \in B_i, i \in S} \frac{f_{iT}^i}{\sum_{i \in B_i} f_{iT}^i} m_{iT} + d_{iT} \right) q_{iT} = 0, \forall s \in \phi \quad (36)$$

这里  $\bar{S}$  是指那些使用包含在组合路段  $s$  内的公交线的其它组合路段(组合路段  $s$  除外)的集合, 即  $\bar{S} = S_s^+ \cup \bar{S}_s$ .

由(31)和(32)又知,  $u_{kT}$  是时段  $T$  内 OD 对  $k$  的最小阻抗, 即是说

$$u_{kT} = \min_j \left\{ \sum_j a_{ij}(l_{iT} + \alpha/f_{iT}) - \sum_j a_{ij} \left( m_{iT} + \sum_{i \in B_i, i \in S} \frac{f_{iT}^i}{\sum_{i \in B_i} f_{iT}^i} m_{iT} \right) \right\} \quad (37)$$

这说明乘客总是选择最小阻抗路径(正常行

驶时间+均衡延迟时间). 需要指出的是, 公交网络的均衡延迟时间包含 2 部分: 一是组合路段  $s (s \in \phi)$  上的延迟时间(如果组合路段  $s$  在组合路径  $j$  上); 二是与组合路段  $s$  竞争同一通过能力的其它组合路段上的排队延迟时间. 这是拥挤公交网络均衡配流问题的重要特点, 它与带能力限制的道路交通均衡配流原则完全不同.

因此根据用户均衡原则, 如果组合路径  $j$  连接 OD 对  $k$ , 且  $u_k$  是 OD 对的最小阻抗, 则网络路径流是用户均衡解的充要条件为

$$\sum_j a_{ij}(l_{iT} + \alpha/f_{iT}) - \sum_j a_{ij}(m_{iT}) + \sum_{i \in B_i, i \in S} \frac{f_{iT}^i}{\sum_{i \in B_i} f_{iT}^i} m_{iT} - u_{kT} \geq 0,$$

及  $h_{jT} = 0, \forall j$  (38)

$$\sum_j a_{ij}(l_{iT} + \alpha/f_{iT}) - \sum_j a_{ij}(m_{iT}) + \sum_{i \in B_i, i \in S} \frac{f_{iT}^i}{\sum_{i \in B_i} f_{iT}^i} m_{iT} - u_{kT} = 0,$$

及  $h_{jT} > 0, \forall j$  (39)

也就是说, 时段  $T$  内的均衡状态是所有的乘客都选择上面所说的最短组合路径作为出行路径. 证毕.

另外容易看出, 每个时段  $T$  内的(P2)是一个线性问题, 约束集是有界的, 因此(P2)必有全局最优解.

### 3.2 求解算法

本节将用等式(19)来代替(P2)中的(29)式, 从而(P2)是一个线性规划问题, 因此存在许多有效的求解算法, 如单纯形算法、对偶单纯形算法等(Dantzig, 1963). 本节使用 Dantzig 的单纯形算法来求解(P2)问题.

求解连续时段上 OD 流的(P2)问题的简单程序如下.

**步骤 1** 给定时段数  $n$ , 及所有路段的初始队列  $q_{s0}$ , 令  $T=0$ .

**步骤 2** 给定时段  $T$  的 OD 需求, 使用单纯形算法求解线性规划(P2)得到解  $q_T, V_T$ .

**步骤 3** 如果  $T=n$ , 则迭代停止; 否则, 令  $T=T+1$ , 用  $q_T$  修正乘客排队长度, 转步骤 2.

在此算法中, 步骤 1 定义了拥挤公交网络的初始条件, 并确定了所研究的时段; 步骤 2 是关键步, 在这一步通过求解线性规划问题来得到时段  $T$  内

的乘客排队长度和组合路段流,其中时段  $T$  内变量  $q_T$  和  $V_T$  可以直接用(19)和(21)式来计算;步骤 3 用来检查终止条件. 由于(P2)问题是线性规划问题,算法自然收敛,实际上,算法会在有限步内终止,这将主要依赖于所研究的时段数.

### 4 算 例

为了说明论文所给算法的执行情况,我们仍以 De Cea 和 Fernández(1993)的公交网络为例,并且  $\alpha$  也取 1. 图 3 的网络包括 1 个 OD 对(即 A—B)和 4 个节点,其中 X、Y 只是转换节点,有 4 条公交线: $L_1$  的频率为 10 车/h,自由行驶时间是 25min; $L_2$  的频率是 10 车/h,从 A 到 X 的自由行驶时间是 7min,从 X 到 Y 是 6min; $L_3$  的频率是 4 车/h,从 X 到 B 和从 Y 到 B 的自由行驶时间都是 4min; $L_4$  的频率为 20 车/h,自由行驶时间是 10min.

这个网络可以通过组合路段转换成图 4 的形式,其基本数据在表 1 中给出,时间相关的 OD 需求如图 5 所示.

表 1 变换后公交网络的基本数据

	乘客流	时段 1	时段 2	时段 3
路段流	$V_1$	50.00	200.00	100.00
	$V_4$	100.00	100.00	100.00
	$V_5$	100.00	150.00	50.00
路线流	$v_3$	17.00	17.00	17.00
	$v_4$	83.00	83.00	83.00
排队	$q_4$	0.00	50.00	0.00

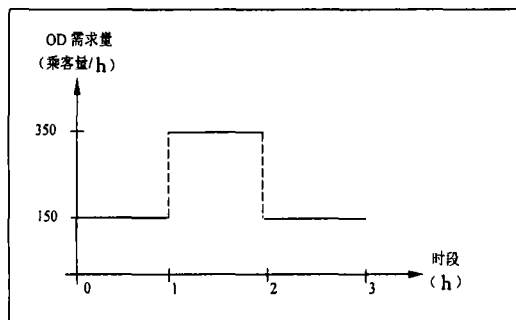


图 5 时间相关的 OD 需求

此外,由  $\bar{V}_T$  的定义,应有

$$\bar{V}_{1T} = 0, \bar{V}_{2T} = V_{5T}, \bar{V}_{3T} = V_{6T} + V_{5T},$$

$$\bar{V}_{4T} = V_{6T}, \bar{V}_{5T} = V_{2T},$$

$$\bar{V}_{6T} = V_{3T} + v_3^{3T} = V_{3T} + \frac{2}{7}V_{3T} = 1\frac{2}{7}V_{3T}$$

表 2 时间相关的路段流及排队长度

基本数据	组合路段					
	S1	S2	S3	S4	S5	S6
$a/f_i$ (min)	6	6	4.3	2.5	6	15
$t_i$ (min)	31	13	9.7	11.5	19	23
$K_i$ (乘客/h)	200	200	250	100	200	100

取时间段  $n=3$ ,则采用本文所给的模型及算法得到的计算结果如表 2 所示. 从表 2 中可以看出,在第 1 个小时不存在排队现象;在第 2 个小时,由于 OD 需求量增大,在组合路段 4 上有排队现象;在第 3 个小时,由于 OD 需求量减小,网络上的排队现象消失.

### 参考文献

- [1] Bell M G H, Lam W H K, Iida Y. A time-dependent multi-class path flow estimator [J]. Proceedings of the 13<sup>th</sup> ISTTT at Lyon, France, 1996, (7): 24—26.
- [2] Chriqui C, Robollard P. Common bus lines [J]. Transportation Science, 1975, (9): 115—121.
- [3] Dantzig G B. Linear Programming and Extensions [M]. Princeton, N J, Princeton University Press, 1963.
- [4] Cea J De, Fernández E. Transit assignment for congested public transport system: An equilibrium model [J]. Transportation Science, 1993, 27:133—147.
- [5] Cea J De, Fernández E. Transit assignment to minimal routes: An efficient new algorithm [J]. Traffic Engineering Control, 1989, 30:491—494.
- [6] Nguyen S, Pallottino S. Equilibrium traffic assignment for large scale transit networks [J]. European Journal of Operation Research, 1989, 37:176—186.
- [7] Sheffi Y. Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1985.
- [8] Spiess H, Florian M. Optimal strategies: A new assignment model for transit network [J]. Transportation Research, 1989, 23B:83—102.
- [9] Wu J H, Florian M, Marcottem P. Transit equilibrium assignment: A model and solution algorithms [J]. Transportation Science, 1994, 28: 193—203.