文章编号: 1000-6788(2002) 01-0026-07

测算投入-产出型技术效率的 DEA模型

李光金[1], 阎 洪[2]
(1.四川大学工商管理学院,四川 成都 610064; 2.香港理工大学管理学系,香港)

摘要: 探讨了先前 DEA研究中所存在的不足,如在决策单元的技术效率的测算中,投入型与产出型所测算的技术效率在数值上就存在差别. 这不仅会影响对决策单元技术效率的实际分析,而且对非有效决策单元的排序也有影响. 本文提出了同时基于投入和产出测算决策单元技术效率的 DEA模型,并讨论了模型求解、技术有效决策单元的识别和非有效决策单元的改进等问题.

关键词: 数据包络分析; 决策单元; 技术效率
中图分类号: N94 文献标识码: A [20]

DEA Model for Measuring Input-and-output-based Technical Efficiency

LI Guang-jin[1], YAN Hong[2]
(1. Sichuan University, Chengdu 610064, China; 2. Dept. of Management, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong)

Abstract: This paper examines the existing shortcomings in previous Data Envelopment Analysis (DEA) studies. In measurements of technical efficiency of Decision Making Units (DMUs), for example, there exists difference between input-based and output-based version in value. As a result, it brings in more difficulties in analyzing actually technical efficiency of a DMU and ranking appropriately DMUs being assessed as inefficient. It suggests another version of DEA for measuring technical efficiency of DMUs based on input and output simultaneously, and then relevant solving approach of model, identification of efficient DMUs and improvement of inefficient DMUs etc. are concerned with in this work.

Keywords: data envelopment analysis; decision making unit; technical efficiency

1 引言

数据包络分析(DEA)是一种测算具有相同类型投入和产出的若干部门(简称决策单元 DMU)相对效率的有效方法. 自从美国著名运筹学家 Charnes等提出具有奠基意义的 CCR[1]模型以来,DEA就引起管理学者和实践家们的极大关注,先后有近 1000多篇 DEA的学术论文在世界范围的杂志上发表[2]. 然而,总结目前 DEA的研究成果,发现其中还有一些问题未解决或解决得不够好.比如,在以"包络"形式[3]建立起来的模型中,为什么在缩小投入(扩大产出)时,一定要保持产出(投入)不变? 其结果是,对某些 DEA模型来讲,其投入型和产出型相对效率不一致,如运用 BCC[4]测算决策单元技术效率时,对同一个决策单元来讲,用投入型 BCC和产出型 BCC的测算结果有时完全不一样,这种情况发生在决策单元非相对有效时,或称决策单元位于生产前沿面下时. 为了解决此问题,本文首先分析传统 BCC所存在的问题及其原因,然后定义了同时考虑投入缩小比率和产出扩大比率的相对效率指数(以下称投入-产出型技术效率),提出测

[20] 收稿日期: 2001-06-22
资助项目: 国家自然科学基金(79800023); 香港理工大学研究基金(A- PB64)

算决策单元投入-产出型技术效率的 DEA模型及其求解方法,进而讨论了决策单元有效性的判别和非有效决策单元的改进,最后给出一个数值例子,旨在说明本文模型和方法的有效性.

2　BCC和决策单元技术效率

如果具有 m 项投入、s 项产出的第 $j\,(j=1,\cdots,n)$ 个决策单元,其投入向量为 $X_j=(x_{1j},\cdots,x_{ij},\cdots,x_{mj})^{\mathrm{T}}>0$,其产出向量为 $Y_j=(y_{1j},\cdots,y_{rj},\cdots,y_{sj})^{\mathrm{T}}>0$,则从投入角度测算决策单元 (X_0,Y_0) 技术效率的 DEA模型(通常称 BCC)为

$$
\begin{aligned}
&\min \theta \\
&\text{s. t.} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \leq \theta X_0, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \geq Y_0 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \forall \lambda_j \geq 0
\end{aligned} \tag{1}
$$

当(1)的最优值为 $\theta^0(\theta^0\leq 1)$ 时,决策单元的 (X_0,Y_0) 技术效率为 θ^0. 需要指出的是,θ^0 仅仅是其基于投入的技术效率(以下称投入型技术效率),而产出型技术效率由下面模型确定.

$$
\begin{aligned}
&\min W \\
&\text{s. t.} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \leq X_0 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \geq W Y_0 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \forall \lambda_j \geq 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

当(2)的最优值为 $W^0(W^0\geq 1)$,决策单元 (X_0,Y_0) 的产出型技术效率为 $1/W^0$. 比较(1)和(2),有

定理 1　如果(1)和(2)的最优值分别为 $\theta^0(\theta^0\leq 1)$ 和 $W^0(W^0\geq 1)$,则

$$\theta^0 = 1 \Longleftrightarrow W^0 = 1$$

证明可参见文献[4],这里用反证法.

先证 当 $\theta^0=1$ 时,$W^0=1$. 当 $\theta^0=1$ 时,假设 $W^0\neq 1$.

因为 $\theta^0=1$,则决策单元 (X_0,Y_0) 位于生产前沿面上. 而根据假设 $W^0\neq 1$,又隐含 (X_0,Y_0) 不位于生产前沿面上,在同一个生产可能集中,(X_0,Y_0) 既位于生产前沿面上同时又不位于生产前沿面上,出现矛盾. 故当 $\theta^0=1$ 时,假设 $W^0\neq 1$ 不成立,因为 $W^0\geq 1$,所以只能是 $W^0=1$.

同理,可以证明当 $W^0=1$ 时,$\theta^0=1$.

由定理 1易得下面推论:

推论　如果(1)和(2)的最优值分别为 $\theta^0(\theta^0\leq 1)$ 和 $W^0(W^0\geq 1)$,则

$$\theta^0 < 1 \Longleftrightarrow W^0 > 1$$

此外,在实际应用过程中不难发现,当 $\theta^0\neq 1$(或 $W^0\neq 1$)时,决策单元 (X_0,Y_0) 的投入型技术效率与产出型技术效率通常不相等,即

$$\theta^0 \neq \frac{1}{W^0}$$

以表 1中 2投入 2产出的 6个决策单元为例,其具体数据和两种技术效率如表 1所示.

表 1中,DMU4的投入型技术效率是 0.6419,而产出型技术效率却是 0.9555,二者差别竟然如此之大. 同样情况也发生在 DMU6上. 而在实践过程中,人们通常只分析测算决策单元投入型技术效率或产出型技术效率,很少关心另一种效率. 这样便提出第一个问题:到底哪一种效率更能反映决策单元的实际情况? 另外,运用相对效率对决策单元进行排序也是 DEA的重要研究内容之一,如果按投入型技术效率排序,DMU6比 DMU4好,但如果按产出型技术效率,反而是 DMU4比 DMU6好,两种排序恰恰相反. 这又

使我们不禁会提出第二个问题,两种排序中,到底按哪一种排序更为可靠?

表 1

	投入 1	投入 2	产出 1	产出 2	投入型技术效率	产出型技术效率
DMU1	1.5	0.2	1.4	0.35	1	1
DMU2	4	0.7	0.8	2.1	1	1
DMU3	3.2	1.2	4.2	1.05	1	1
DMU4	5.2	2	2	1.8	0.6419	0.9555
DMU5	3.5	1.2	1.8	2.0	1	1
DMU6	3.2	0.8	1.2	1.0	0.7189	0.6658

对以上两个问题,我们曾作过相应研究[5,6]. 与之不同的是,本文将从另一个角度对以上问题进行深入讨论.

3 投入-产出型技术效率及其 DEA模型

在传统 BCC中,出现不一致的投入型技术效率与产出型技术效率是必然的. 仅以单投入和单产出为例,图 1中,$BCDE$为 DMU_A, DMU_C, DMU_D, DMU_E组成的有效前沿生产面,其中 DMU_A为非有效决策单元. (1)式通过固定产出(即 DMU_A沿 AF方向),而将投入以相同比率尽可能缩小来测算 DMU_A的技术效率;而(2)式通过固定投入(即 DMU_A通过沿 AG方向)而将产出以相同比率尽可能扩大来测算 DMU_A的技术效率.

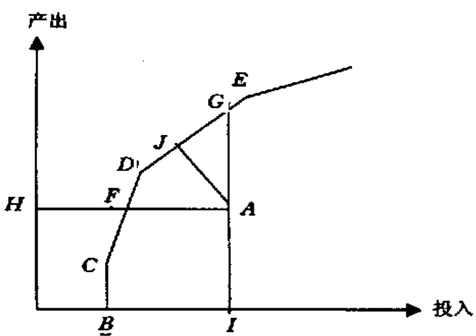

图 1

对于 DMU_A,投入型技术效率为 $\frac{HF}{AH}$,相应的技术非有效率是 $\frac{AF}{AH}$[7],产出型技术效率是 $\frac{AI}{GI}$,相应的技术非有效率为 $\frac{AG}{GI}$. 显然没有理由认为下面等式一定成立.

$$\frac{HF}{AH}(\theta^0) = \frac{AI}{GI}\left(\frac{1}{W^0}\right)$$

实际应用中,人们只是从投入或产出角度去研究决策单元的相对技术效率,并没有综合考虑投入缩小比率和产出扩大比率. 因而才出现同一个决策单元有不相等的两个技术效率.

需要综合考虑投入缩小比率和产出扩大比率,一般有两种办法:

一是分别寻求投入缩小比率和产出扩大比率,即分别求解(1)和(2),将得出的两种技术效率代入综合技术效率指数

$$Z = \frac{1}{2}\left(\theta^0 + \frac{1}{W^0}\right) \tag{3}$$

或

$$Z = \frac{\theta^0}{W^0} \tag{4}$$

此法计算过程复杂,但原理简单.

二是在缩小投入的同时,尽可能扩大产出(即沿图 1中 AJ方向),然后将投入缩小比率和产出扩大比率代入(3)或(4). 文献[5]运用模糊规划和(3)测算了决策单元综合(投入与产出)技术效率,但算法复杂,而且必须分两阶段进行;文献[6]运用(4)和下面规划(5)测算,除了同样必须分两阶段完成外,此方法在算

法上还存在问题 . 即由 (5)得出的最优值 $W^* - \theta^*$,并不一定使式 (4)在与 (5)相同的可行域里取最小值 .

$$
\begin{aligned}
&\max W - \theta \\
&\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \leq \theta X_0, \quad \theta \leq 1 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \geq W Y_0, \quad W \geq 1 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \forall \lambda_j \geq 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

为此 ,本文将基于技术效率指数 ((4)式) ,提出直接测算决策单元投入 产出型技术效率的 DEA模型 (6) .

$$
\begin{aligned}
&\min Z = \frac{\theta}{W} \\
&\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \leq \theta X_0, \quad \theta \leq 1 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \geq W Y_0, \quad W \geq 1 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \forall \lambda_j \geq 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

分析 (1) , (2)和 (6) ,有

定理 2 若规划 (6)的最优解是 Z^* , θ^* , W^* , λ^* , 则

$$\theta^0 \leq \theta^*, \quad W^0 \geq W^*$$

$\theta^0 \leq \theta^*$ 显然成立 ,因为规划 (6)的最优解也一定是规划 (1)的可行解 .

同理 $W^0 \geq W^*$

定理 3 若规划 (6)的最优解是 Z^* , θ^* , W^* , λ^* 则 $Z^* = 1(\theta^* = 1, W^* = 1)$当且仅当 $\theta^0 = 1(W^0 = 1)$.

证 先证 $\theta^0 = 1(W^0 = 1)$时 , $Z^* = 1(\theta^* = 1, W^* = 1)$.

因为 $\theta^0 = 1(W^0 = 1)$,根据定理 2,有

$$\theta^0 = 1 \leq \theta^* \leq 1, \quad 即\ \theta^* = 1$$

同理 $$W^* = 1$$

所以 $$Z^* = 1$$

其次 ,当 $Z^* = 1$ $(\theta^* = 1, W^* = 1)$时 ,假定 $\theta^0 \neq 1$, 即 $\theta^0 < 1$.

由 (6)得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* X_j \leq X_0 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* Y_j \geq Y_0 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* = 1
\end{aligned}
$$

由 (1) ,又有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^0 X_j \leq \theta^0 X_0 < X_0 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^0 Y_j \geq Y_0 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^0 = 1
\end{aligned}
$$

显然, λ_j^0, θ^0, W= 1也是(6)的可行解,因此

$$\frac{\theta^0}{W} < \frac{\theta^*}{W} = 1$$

这与 $Z = 1$是(6)最小值矛盾,故 $\theta^0 < 1$不成立,即 $\theta^0 = 1$.

从定理 1可知,此时 W= 1.

下面探讨分式规划(6)的求解方法,通过 Charnes-Cooper变换[8],即

$$\text{设 } f > 0,\ \text{令 } \theta = \frac{O}{f},\ W = \frac{h}{f},\ \lambda_j = \frac{d_j}{f},\quad h = 1$$

(6)被化为等价的线性规划(7).

$$\begin{aligned}
&\min O\\
&\text{s. t.} \sum_{j=1}^{n} d_j X_j \leq O X_0\\
&O \leq f\\
&\sum_{j=1}^{n} d_j Y_j \geq Y_0\\
&\sum_{j=1}^{n} d_j = f\\
&\forall d_j \geq 0,\quad O \geq 0,\quad f > 0
\end{aligned} \tag{7}$$

如果(7)的最优解为 d_j^*, h^*, f^*,则决策单元(X_0, Y_0)的投入-产出型技术效率为

$$Z^* = O^* \tag{8}$$

4 技术有效决策单元识别与技术非有效决策单元改进

许多学者的研究认为,带有非阿基米德无穷小"X"的决策单元有效性识别方法存在诸多问题. 为此,本文将通过模型(9)识别决策单元的技术有效性.

$$\begin{aligned}
&\max Z = \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} W_r - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i\\
&\text{s. t.} \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij} = \theta_i x_{i0},\quad \theta_i \leq 1,\ i = 1, \cdots, m\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj} = W_r y_{r0},\ W_r \geq 1,\ r = 1, \cdots, s\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1,\quad \forall \lambda_j \geq 0
\end{aligned} \tag{9}$$

定义 若 Z^*, λ_j^*, θ_i^*, W_r^* 是规划(9)的最优解,则当 $Z^* = 0$时,决策单元(X_0, Y_0)技术有效. 否则,它为非技术有效.

当(X_0, Y_0)非技术有效时,可以根据定理 4对其投入产出进行调整,以使之达到相对有效.

定理 **4** 对于非技术有效决策单元(X_0, Y_0),若令

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i0} &= \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* x_{ij} = \theta_j^* x_{i0},\quad i = 1, \cdots, m\\
\hat{y}_{r0} &= \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* y_{rj} = W_r^* x_{r0},\quad r = 1, \cdots, m
\end{aligned} \tag{10}$$

则新决策单元$(\hat{X}_0, \hat{Y}_0)$相对于原来 n 个决策单元技术有效.

证明 写出判别$(\hat{X}_0, \hat{Y}_0)$有效性的对应规划(9),得

$$\max Z = \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\hat{W}_r - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{\theta}_i$$

$$
\begin{aligned}
\text{s. t.} \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j x_{ij} + \hat{\lambda}_{n+1} \hat{x}_{i0} &= \hat{\theta}_i \hat{x}_{i0}, \quad \hat{\theta}_i \le 1,\ i = 1,\cdots,m \\
\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j y_{rj} + \hat{\lambda}_{n+1} \hat{y}_{r0} &= \hat{W}_r \hat{y}_{r0}, \quad \hat{W}_r \ge 1,\ r = 1,\cdots,s \\
\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j + \hat{\lambda}_{n+1} &= 1 \ge 0,\ \forall \hat{\lambda}_j \ge 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

若 $\hat{\theta}_i^*$, $\hat{W}_r^*$, $\hat{\lambda}_j^*$ 是(11)的最优解,将之和(10)一并代入(11)约束后有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} (\hat{\lambda}_j^* + \hat{\lambda}_{n+1}^* \lambda_j^*) x_{ij} = \hat{\theta}_i^* \theta_i^* x_{i0}, \ \hat{\theta}_i^* \theta_i^* \le 1,\ i = 1,\cdots,m \\
&\sum_{j=1}^{n} (\hat{\lambda}_j^* + \hat{\lambda}_{n+1}^* \lambda_j^*) y_{yj} = \hat{W}_r^* W_r^* y_{r0}, \ \hat{W}_r^* W_r^* \ge 1,\ r = 1,\cdots,s \\
&\sum_{j=1}^{n} (\hat{\lambda}_j^* + \hat{\lambda}_{n+1}^* \lambda_j^*) = 1,\ \forall (\hat{\lambda}_j^* + \hat{\lambda}_{n+1}^* \lambda_j^*) \ge 0
\end{aligned}
$$

可见 $\hat{\lambda}_j^* + \hat{\lambda}_{n+1}^* \lambda_j^*$, $\hat{\theta}_i^* \theta_i^*$, $\hat{W}_r^* W_r^*$ 也是规划(9)的可行解,因此有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \hat{W}_r^* W_r^* - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \hat{\theta}_i^* \theta_i^* \le \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} W_r^* - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \theta_i^* \\
&\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \hat{W}_r^* W_r^* - \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} W_r^* + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \theta_i^* - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \hat{\theta}_i^* \theta_i^* \le 0 \\
&\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} (\hat{W}_r^* - 1) W_r^* + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \theta_i^* (1 - \hat{\theta}_i^*) \le 0
\end{aligned}
$$

因为 $\hat{\theta}_i^* \le 1$, $\theta_i^* \le 1$, $\hat{W}_r^* \ge 1$, $W_r^* \ge 1$, 故一定有 $\forall \hat{\theta}_i^* = 1$, $\hat{W}_r^* = 1$,即 $\hat{Z}^* = 0$

从定义可知,决策单元 $(\hat{X}_0, \hat{Y}_0)$为技术有效.

5 数值例子

为了说明本文模型与方法的有效性,考虑如表 2的数值例子,投入产出型技术效率及非技术有效决策单元的改进目标值见表 3.

表 2

决策单元	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
投入 1	4	12	8	6	2	3	3	8	4	6
投入 2	6	8	2	6	8	9	7	12	10	5
产出 1	2	3	2	4	2	1	2	3	1	2
产出 2	1	1	2	2	3	2	4	1	3	2

表 3

决策单元	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Θ^*	1	0.5192	1	1	1	0.4762	1	0.5192	0.5556	0.735
有效性	非	非	有效	有效	有效	非	有效	非	非	非
$\hat{x}_{10}$	4	4.5	8	6	2	3	3	4.5	4	5
$\hat{x}_{20}$	6	6.5	2	6	8	7	7	6.5	6.8	5
$\hat{y}_{10}$	2	3	2	4	2	2	2	3.2	2.8	2
$\hat{y}_{20}$	3.6	3	2	2	3	4	4	3	3	3.2

6 结束语

在测算决策单元的技术效率时 ,不能只考虑其投入缩小或产出扩大 ,这样势必会出现数值不等的两种效率. 从而致使对某些决策单元的技术效率分析具有片面性 ,进而影响非有效决策单元的排序. 本文基于“考虑投入缩小的同时 ,将产出尽量扩大”的投入-产出型技术效率指数 ,建立了相应的投入-产出型 DEA模型 ,并提出了相应的求解方法. 数值例子证明其对文中所提出的问题给予了很好解决.

最后有两点需要说明. 第一 ,用同样方法所建立的投入-产出型 CCR模型 ,经过 Charnes-Cooper变换后 ,与传统的投入型 CCR完全一样 (由于篇幅有限 ,文中没有叙述) ,因而在 CCR模型中 ,不会存在不相等的投入性和产出型相对效率; 第二 ,对于其它 DEA模型 ,诸如非增规模报酬 (NIRS)、非减规模报酬 (NDRS) ,同样可以用本文所述方法建立其相应的投入-产出型 DEA模型 ,从而解决投入型与产出型之间的不一致和非决策单元排序问题.

参考文献:

[1] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units [J]. European Journal of Operational Research, 1978, 2: 429- 444.

[2] Seiford L H. Data envelopment analysis: the evolution of the state of the art (1978- 1995) [J]. The Journal of Productivity Analysis, 1996, 7: 99- 137.

[3] Cooper W W, Tone K. Measures of inefficiency in data envelopment analysis and stochastic frontier estimation[J]. European Journal of Operational Research, 1997, 2: 72- 78.

[4] Banker R, Charnes A, Cooper W W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis[J]. Management Science, 1984, 30: 1078- 1092.

[5] 李光金. 基于双准则规划的 DEA及其相对效率 [J]. 管理工程学报, 1998, 12(1): 45- 51.

[6] 李光金. 评价相对效率的投入-产出型 DEA及其应用 [J]. 管理科学学报, 2001, 4(2): 58- 62.

[7] Athanassopoulos A D. Lambroukos N, Seiford L. Data envelopment scenario analysis for setting targets to electricity generating plants. European Journal of Operational Research, 1999, 115: 413- 424.

[8] Charnes A, Cooper W W. Programming with linear fractional functionals [J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1962, 15: 333- 334.

全球供应链管理国际会议 (ICGSCM) 征文通知

首届全球供应链管理国际会议 (ICGSCM)将于 2002年 8月 5日 - - 7日在北京召开. 它将为来自各国学术界、企业界从事供应链管理的有关人士提供一个深入交换信息和见解的论坛. 欢迎投稿 ,论文英文摘要 (A4纸一页)请于 2002年 3月 15日前寄到会议秘书处 (可通过 Email). 具体情况见会议网页 http: //www.icgscm.em.tsinghua.edu.cn(国内代表会务费另行通知). 征文范围主要包括: DSS for supply chain management, Inventory Management, Logistics, Manufacturing systems with supply chain, Purchasing and Material Management, Supply Chain and E- Market Optimization, Supply chain coordination, Applications.

会议 (秘书处)联系人: 朱岩 ,肖永波

通讯地址: 清华大学经济管理学院 (100084)

电话: 62784555, 62789885- 48

Email: scm2002@em.tsinghua.edu.cn