

织物热湿传输耦合方程的一种求解算法^{*1)}

刘迎曦 李凤志

(大连理工大学工程力学系 大连 116023)

罗钟铤

(大连理工大学应用数学系 大连 116023)

李 毅

(香港理工大学纺织与制衣学院 香港)

A NEW ALGORITHM FOR SOLUTION OF TRANSIENT THERMAL AND HUMIDITY FIELD IN POROUS FABRIC

Liu Yingxi Li Fengzhi

(*Dept. of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology*)

Luo Zhongxuan

(*Dept. of Applied Mathematics, Dalian University of Technology; Dalian, 116023, China*)

Li Yi

(*Institute of Textiles and Clothing, The Polytechnic University of Hong Kong, Hong Kong*)

Abstract

The study progress of heat and moisture transfer within fabric is reviewed. For the time area, a mixed algorithm with precise time integration and finite difference for solution of a transient thermal and humidity field in porous fabric is presented. For space area, the finite element is applied. To avoid the unreasonable phenomena such as jump or vibratility in initial time step for solution thermal and moisture equations by finite element, the lumped mass heat capacity matrix and moisture capacity matrix is applied. The sorption or desorption rate of water by the fibers is considered as collection or source and a scheme of the predigested precise time integration is advanced.

Key words: heat and moisture transfer; fabric; precise time integration; coupled equation; sorption

* 2002 年 5 月 15 日收到.

1) 国家自然科学基金 (10072014), 高校博士点专项基金 (2000014107) 资助项目.

§1. 引 言

随着生活水平的提高,人们对穿着的要求也越来越高,热湿舒适性是服装服用性能的一个重要方面,考虑人—服装—环境,这样一个系统,服装在人体和外界环境中起到一个中介作用,在这个系统中,人体由于新陈代谢要散发热量并排出汗液和别的排泄物,这些热量、汗水及挥发的汗气要通过服装的中介作用而传向外界,而外界环境的温度、湿度、气流、辐射、光照等则要经服装的阻隔或吸收而作用(或)影响于人体.人可以通过服装的加减、选择、改变着装方式调节人体周围微气候区的气候,人体本身也可以视气候环境作出有限的自适应调节.在这里,服装、人体、环境三者构成了一个相互联系协调的体系,服装起到了缓和环境、部分代替、延伸或增强人体某一方面功能的作用,从生理学角度考虑,服装可以看成准生理学系统,它是人体的外延^[1].由此可见人所穿的衣服时时刻刻都在进行着复杂的热质传输过程,因此对服装面料(织物)热质传输过程的研究,增强服装的调节机能,使人体感觉舒适,对不同环境下服装设计的选材是非常有意义的.

吸附现象是织物热湿传输性能研究的核心问题, Henry 于 1939 年^[2] 提出一个描述织物中热湿传输的数学模型,并于 1948 年^[3] 进行了深入研究.通过假定纤维中的含湿量线性依赖于温度和空气的湿浓度,并且纤维与邻近空气达到平衡是瞬间的,得到了一个解析解.但该假设离实际的纤维吸附过程太远,限制了它的应用.为了改进上述模型 David 和 Nordon^[4,5] 于 1967 年提出了纤维中湿含量与周围相对湿度的实验表达式,并结合几个被 Henry 忽视的因素给出了方程的数值解.这些表达式忽略了纤维的吸附动力学原理. Li 和 Holcombe^[6] 发展了一个新的吸附率方程,该方程考虑到羊毛纤维的两阶段吸附特性并且结合了更实际的边界条件去模拟羊毛织物的吸附行为.他们结合了 Downes 和 Mackay^[7] 及 Watt^[8] 的研究成果,假设纤维中的水蒸气的吸附率是一个随时间变化的两阶段过程. Li 和 Luo^[9] 改进了纤维中湿吸附过程的数学模拟方法,获得了较好的解,并且物理意义明确.羊毛纤维中的两阶段吸附过程通过一个统一的扩散方程和两套变化的扩散系数来模拟.

从现有的文献^[6,9] 上看,对于织物的热湿耦合方程的空间离散大部分采用有限差分法,对于服装来说,三维问题结构复杂,除了由于边界条件差分化引起稳定性问题以外,还存在边界形状复杂,网格不落在边界上,处理时还会引起新的误差.有限元法是目前工程计算的有力武器,它的优点是特别适合复杂结构的模拟,本文就采用有限元法进行空间离散,对于时间域上的离散,大部分文献采用差分法,文 [10] 提出的精细积分法,精度高,稳定性好,对于常系数方程只需进行一次指数矩阵的运算,计算结果受步长影响较小,因此对于常系数的蒸汽的质量守恒方程,在时间域上,本文采用精细积分法.对于变系数方程,由于指数矩阵的计算需要大量时间,所以对于变系数的能量守恒方程,在时间域上,本文采用两点后差格式进行迭代计算.

§2. 织物湿热传输方程

织物中的热湿耦合传输的数学模型是由 Henry(1939, 1948) 及 Nordon, David(1967) 还有 Li, Holcombe(1992) 等人提出并发展的.

2.1 蒸汽的质量守恒方程

$$\varepsilon \frac{\partial C_a}{\partial t} + (1 - \varepsilon) \frac{\partial C_f}{\partial t} = \frac{D_a \varepsilon}{\tau_1} \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2}. \quad (1)$$

2.2 能量守恒方程

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda (1 - \varepsilon) \frac{\partial C_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (2)$$

其中 ε 为孔隙率, C_a 为纤维间孔隙中的蒸汽浓度, C_f 为纤维中的蒸汽浓度, D_a 为水蒸气在空气中的扩散系数, τ_1 为弯曲率, T 是温度, c_v, λ, K 分别为织物的体积热容量、吸附热、热传导系数, 它们是纤维中含水量和温度的函数. 方程 (1) 和 (2) 通过纤维的浓度变化率耦合. 本文采用文 [9] 给出的如下浓度变化率方程:

$$\frac{\partial C_f}{\partial t} = \text{const} \cdot \rho \cdot W_{cs}(RH) \cdot (D_f / R_f^2), \quad (3)$$

其中 const 是实验系数, ρ 是纤维密度, $W_{cs}(RH)$ 是纤维表面含水量, 可以根据纤维表面蒸汽浓度和温度来求得相对湿度, 进而通过吸湿曲线来确定. D_f 是纤维中水蒸汽扩散率, 是纤维含水量的函数, R_f 是纤维半径. 纤维内部的含水量由下式给出:

$$W_c = C_f / \rho. \quad (4)$$

2.3 织物的边界条件

$$\frac{D_a \varepsilon}{\tau_1} \frac{\partial C_a}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_c (C_a - C_{ab}), \quad (5)$$

$$\frac{D_a \varepsilon}{\tau_1} \frac{\partial C_a}{\partial x} \Big|_{x=L} = -h_c (C_a - C_{ab}), \quad (6)$$

$$K \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_t (T - T_{ab}), \quad (7)$$

$$K \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = -h_t (T - T_{ab}), \quad (8)$$

式中 C_{ab}, T_{ab} 分别为环境空气浓度和温度, 其中 C_{ab} 可以根据相对湿度和温度确定. h_c 是传质系数, h_t 是联合导热系数.

2.4 初始条件

$$T(x, 0) = T_0, \quad (9)$$

$$C_a(x, 0) = C_{a0}. \quad (10)$$

§3. 方程的求解方法

由于有限元法特别适合模拟复杂结构和复杂的边界条件, 故本文采用有限元法对方程进行空间离散. 又因为热传导类方程的特殊性, 用有限元求解时会产生一些如阶跃、初始步波

动等不合理现象^[11,12],文[11]提出了采用集中质量热容矩阵的办法,对使用集中质量热容矩阵的合理性给予了证明,并且指出使用该方法可以避免各种不合理现象而且精度不低于采用协调质量热容阵. 湿传输方程(1)的形式与热传导方程(2)的形式类似,同属于热传导类方程. 在初始几步如果产生这些不合理现象可能导致整个计算过程失败,因此本文采用集中质量湿容矩阵及热容矩阵. 方程(1)的建立是基于如下考虑: 织物结构如图1(a),纤维之间的孔隙中的水蒸气浓度变化是由于扩散作用和被纤维吸附引起的. 这里,我们也可以把纤维看成一个孔洞,蒸汽被纤维吸附的过程,可以认为是蒸汽流入了孔洞的过程,从而引起蒸汽浓度的变化. 孔洞在流体力学中叫做汇如图1(b),对于方程(2),由于吸附进纤维内的蒸汽发生相变,从而有潜热产生,同方程(1)类似的考虑把潜热项看成是热源如图1(c),有限元法对源(汇)是很容易处理的.

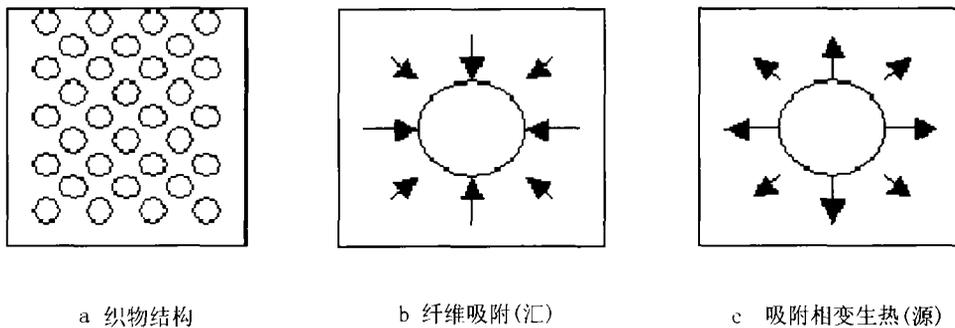


图1 织物结构及源汇示意图

应用有限元法并采用集中质量湿容矩阵、热容矩阵可把方程(1),(2)离散成如下形式:

$$[C_1] \{\dot{C}_a\} + [K_1] \{C_a\} + \{Q_1\} = 0, \quad (11)$$

$$[C_2] \{\dot{T}\} + [K_2] \{T\} + \{Q_2\} = 0, \quad (12)$$

其中 $[C_1]$, $[C_2]$ 分别是湿容矩阵、热容矩阵,由于采用集中质量法,它们都是对角阵. $[K_1]$, $[K_2]$ 分别为湿传导、热传导矩阵. $\{Q_1\}$, $\{Q_2\}$ 分别是汇、热源项. $\{\dot{C}_a\}$, $\{\dot{T}\}$ 分别表示纤维间孔隙内水蒸气浓度、织物温度随时间变化率.

观察方程(11)可以看到系数矩阵都是常量只有 $\{Q_1\}$ 是与源(汇)有关的向量,由于采用集中质量湿容矩阵,故 $[C_1]$ 是对角阵,所以可以非常方便地把(11)变为如下形式:

$$\{\dot{C}_a\} = [H] \{C_a\} + \{f\}. \quad (13)$$

在每一步把 $\{f\}$ 看作是常向量, $[H]$ 是常数矩阵.精细积分法的精度是其它迭代算法无法比拟的,而且特别适合常系数方程的运算.另外孔隙中的水蒸气浓度对纤维的浓度变化率有直接影响,所以把浓度算精确些很有必要,故这里对方程(13)采用文[10]提出的精细积分

法求解, 经过推导, 可得到如下形式的迭代格式:

$$\{C_a\}_{k+1} = [T] \{C_a\}_k + [T_a] [H]^{-1} \{f\}_k, \quad (14)$$

上式中, 下标 k 表示前一时刻, $k+1$ 表示当前时刻. $[T]$ 是指数运算矩阵, 也是精细积分法的关键所在. 事实上 $[H]$ 并非总是可逆, 而且求逆需要做大量运算, 考虑到 $[T_a]$ 的形成过程, 它本身含有 $[H]$, 所以可以根据文献 [10] 中指数运算矩阵的推导过程给出如下简化精细积分迭代格式^[13]:

首先, 令

$$[T_a] = [H] \Delta t + ([H] \Delta t)^2 / 2 + ([H] \Delta t)^3 / 3! + ([H] \Delta t)^4 / 4! = [H] \Delta t ([I] + [G]),$$

其中 $\Delta t = \tau / 2^N$, 这里取 $N=20$, τ 为时间步长, $[I]$ 是单位矩阵, $[G] = ([H] \Delta t) / 2 + ([H] \Delta t)^2 / 3! + ([H] \Delta t)^3 / 4!$.

对 I 循环. DO I=1,N

$$[G] = 2^{I-1} [T_a] + [T_a] [G] + 2 [G], \quad [T_a] = 2 [T_a] + [T_a] \times [T_a]$$

END DO 循环结束

$$[T] = [I] + [T_a], \quad [T_G] = \Delta t (2^N [I] + [G]),$$

$$\{C_a\}_{k+1} = [T] \{C_a\}_k + [T_G] \{f\}_k. \quad (15)$$

从上式可以看出, 只有 $\{f\}_k$ 是变化的, 故每一步只须求出 $\{f\}_k$ 就可进行迭代了.

对于 (12) 式, 由于系数矩阵都是随浓度和温度变化的, 在时间域上, 采用精细积分每一步都需要进行指数矩阵运算, 运算量较大, 所以这里采用无条件稳定的两点后差迭代格式^[14]

$$\left([K_2] + \frac{[C_2]}{\tau} \right) \{T\}_{k+1} = -\{Q_2\}_k + \frac{[C_2]}{\tau} \{T\}_k. \quad (16)$$

联立方程组 (15), (16) 就可以根据前一时刻温度、水蒸气浓度, 求得当前时刻温度、水蒸气浓度.

§4. 算 例

分别考查羊毛织物和纯棉织物, 羊毛织物的厚度为 2.96mm, 纯棉织物的厚度为 2.19mm, 初始条件 293.15K, 相对湿度 0%, 将其放置于室温 293.15K, 相对湿度从 0% 突然变到 99% 的环境下, 由于纤维的吸湿特性, 使蒸汽发生相变, 从而有相变潜热产生, 导致温度变化. 在这里最感兴趣的是织物表面的温度变化. 因为织物表面与人体最接近, 也是人体能感觉到的. 文 [9] 给出了织物表面温度变化的实验值, 这里采用本文提出的计算方法对该过程进行了数值模拟, 选取织物边界上的一个测点的计算值与文 [9] 的实验结果进行了比较. 参数的选取如表 1, 纤维的等温吸湿曲线^[15] 形状如图 2, 理论计算与实验结果如图 3.

表 1 织物及纤维特性参数表

参数	符号	单位	羊毛	纯棉
纤维中水蒸气扩散系数 (第一阶段)	D_f	m^2/s	$(1.3 + 60.2W_c - 1000.6 W_c^2) \times 10^{-14}, t < 540s$	$(0.968 + 80.36W_c - 1666 W_c^2) \times 10^{-14}, t < 540s$
纤维中水蒸气扩散系数 (第二阶段)	D_f	m^2/s	$1.44\{1 - \exp[-19.16 \exp(-21W_c)]\} \times 10^{-14}, t \geq 540$	$2.5\{1 - \exp[-3.54 \exp(-35.0W_c)]\} \times 10^{-14}, t \geq 540$
空气中的扩散系数	D_a	m^2/s	$2.5e-5$	$2.5e-5$
织物的体积热容量	C_v	kJ/m^3K	$373.3 + 4661.0W_c + 4.22T$	$(1663.0 + 4184.0W_c)/(1 + W_c)$
织物的热传导率	K	kJ/m^2K	$(38.49 - 0.72W_c + 0.113 W_c^2 - 0.002W_c^3) \times 10^{-3}$	$(44.1 + 63.0W_c) \times 10^{-3}$
实验常数	Constant		$5.9e4$	$6.5e4$
吸附热	λ	kJ/kg	$1602.5 \exp(-11.72W_c) + 2522.0$	$1030.9 \exp(-22.39W_c) + 2522.0$
织物的孔隙率	ϵ		0.925	0.919
织物的弯曲率	τ_1		1.2	1.198
纤维的密度	ρ	kg/m^3	1300	1550
纤维的半径	R_f	m	$1.03e-5$	$0.66e-5$
质传输系数	h_c	m/s	0.137	0.137
热传输系数	h_t	W/m^2K	99.4	99.4

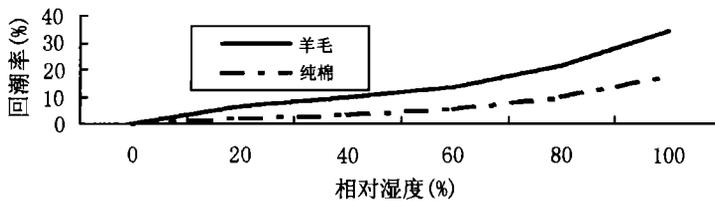


图 2 纤维的等温吸湿曲线

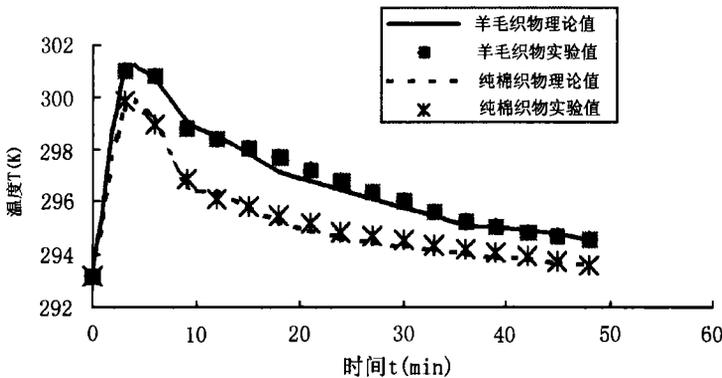


图 3 织物表面由于吸附产生相变潜热引起的温度变化

从图中可以看出计算的温度变化趋势基本上与实验趋势类似, 而且各点数值接近, 模拟效果较好.

§5. 结 论

(1) 本文研究了织物结构特点和织物热湿耦合传输的物理过程, 将传统热、湿传输方程中的耦合项赋予流体力学中的源(汇)新概念. 在此基础上, 将有限元法用于织物热湿耦合模型的求解.

(2) 文中提出的一种简化的精细积分格式, 与一般迭代算法比较, 不仅计算精度高, 而且避免了 $[H]$ 矩阵求逆过程, 即减少了数值计算的工作量, 又扩展了该方法在工程应用中的范围.

(3) 采用集中质量热容矩阵、湿容矩阵简化了一些矩阵求逆的运算, 避免了数值计算过程中的阶跃、初始步震荡等不合理现象.

(4) 本文方法对空间离散采用了有限元模式, 有利于复杂结构及边界的织物模拟.

(5) 通过羊毛和纯棉织物的实验和理论曲线的比较, 不难看出本文方法的可行性.

致谢: 感谢纪峥教授给予的有益讨论

参 考 文 献

- [1] 王府梅, 服装面料的性能设计, 中国纺织大学出版社, 2000.12 p88.
- [2] P. S. H. Henry, Diffusion in absorbing media. Proc. R. Soc. 171 (1939) 215-241.
- [3] P. S. H. Henry, The diffusion of moisture and heat through textiles, Discuss. Faraday Soc 3(1948)243-257.
- [4] P. Nordon. H. G. David, Coupled diffusion of moisture and heat in hygroscopic textile materials. Int. J. Heat Mass Transfer 10 (1967) 853-866.
- [5] H. G. David. P. Nordon, Case studies of coupled heat and moisture diffusion in wool beds. Textile Res. J. 39(1969)166-172.
- [6] Y. Li. B. V. Holcombe, A two-stage sorption model of the coupled diffusion of moisture and heat in wool fabric. Textile Res. J. 62 (4) (1992)211-217.
- [7] J. G. Downes, B. H. Mackay, Sorption kinetics of water vapor in wool beds. J. Polymer Sci.28(1958)45-67.
- [8] I. C. Watt, Kinetic study of the wool-water system. Part II. the mechanisms of two-stage absorption. Textile Res. J. 30 (1960) 644-651.
- [9] Y. Li, Z. X. Luo, Physical mechanisms of moisture diffusion into hygroscopic fabrics during humidity transients. Journal of the textile Institute. 2000.Vol.91. pp: 302-316
- [10] 钟万勰, 暂态历程的精细计算方法, 计算结构力学及其应用, 1:12 (1995), 1-6.
- [11] 纪峥, 钟万勰, 关于离散热传导物理模型的探讨, 计算结构力学及其应用, 4:11 (1994), 408-413.
- [12] 张柔雷, 余颖禾, 有限元法求解暂态温度场中阶跃现象的分析, 南京工学院学报, 3 (1983), 102-107.
- [13] 李凤志, 有限元法和精细积分法在瞬态热传导中的应用, 大连理工大学学士学位论文, 1998.6.
- [14] 孔祥谦, 有限单元法在传热学中的应用, 科学出版社 1998.9, p134.
- [15] Morton, W. E., and Hearle, J. W. S., Physical Properties of Textile Fibres, The Text. Institute, Manchester, U. K., 1975, p169.